

Examen

OPLEIDINGSONDERDEEL: Wiskunde 1A

TITULARIS: Philippe Carette

DATUM: jan 2014

DUUR VAN HET EXAMEN: 2u15'

Vraag	Behaalde score	op
1		12
2		10
3		8
4		7
5		8
Totaal		45

NAAM: MODELOPLOSSING VERSIE ROZE/GROEN

VOORNAAM: _____

STUDENTENNUMMER: _____ VOLGNUMMER: _____

KRUIS AAN WAT VAN TOEPASSING IS:

Ik ben:

- ☐ student modeltraject eerste bachelor handelswetenschappen
- ☐ student met individueel jaarprogramma (GIT)
- ☐ Andere (specifieer): _____

ENKEL TOEGELATEN OP TAFEL:

- studentenkaart
- schrijfgerei

ALGEMENE RICHTLIJNEN VOOR HET MAKEN VAN HET EXAMEN:

- Controleer of deze opgavenbundel compleet is door de paginanummering na te kijken.
- Voor de definitieve antwoorden gebruik je deze bundel en voor kladberekeningen het blank papier. Scheid bij het afgeven zorgvuldig het net van het klad.
- Noteer steeds je naam op elk beschreven kladblad. Indien nodig kan je steeds papier bijvragen.
- Het gebruik van een rekentoestel is NIET toegelaten. Laat getallen die je zonder rekenmachine niet kan berekenen gewoon staan (zoals bijvoorbeeld e^{-3} , $\log_2 5$, $\sqrt[3]{7}$ etc.).
- In dit examen is het gebruik van de regel van de l'Hospital NIET toegestaan.
- **Bij het afgeven onderteken je de aanwezigheidslijst. Het volgnummer dat je dan wordt toegewezen noteer je op de voorziene plaats hierboven op dit blad.**

1. (a) 8 ptn **Juist of fout?** Vul in met "juist" of "fout".

De score op deze vraag wordt toegekend aan de hand van de volgende tabel:

Aantal correct beantwoorde items	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Score	0	1	1	2	3	3	4	6	8

- 1) De tangensfunctie is een periodieke functie met periode π . 1) J
- 2) Voor elke $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ geldt $x \leq \sin x$. 2) F
- 3) $\text{bld}(\text{Bgtan}) =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ 3) J
- 4) De functie $f(x) = x^4$ is een injectie. 4) F
- 5) De grafieken van een functie en haar inverse functie zijn elkaars spiegelbeeld t.o.v. de Y -as. 5) F
- 6) De grafieken van de functies f en g , waarbij $g(x) = -f(x)$, zijn elkaars spiegelbeeld t.o.v. de X -as. 6) J
- 7) $\log_3 x = -\log_{1/3} x$ voor elke x waarbij de uitdrukkingen gedefinieerd zijn 7) J
- 8) Als $x = a$ een verticale asymptoot is aan de grafiek van de functie $y = f(x)$, dan is f ophefbaar discontinu in a . 8) ~~J~~ F

- (b) 4 ptn Met welke limiet kan men de richtingscoëfficiënt van een schuine asymptoot van de functie $y = f(x)$ voor $x \rightarrow +\infty$ berekenen?

Bewijs.

Theorie

2. 10 ptn Bepaal het domein van de volgende functie:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x} + \sqrt[3]{1-x}}{-3 + \log_2(2-x)}$$

Bestaansvoorwaarden:

- ① $x^2 - 3x \geq 0$
- ② $2 - x > 0$ (dom. log. fctie)
- ③ $-3 + \log_2(2-x) \neq 0$

Uitwerking:

① $x(x-3) = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ of } x=3$

x	0	3
$x^2 - 3x$	$+0$	$-0+$

$$x \in]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[$$

② $2 - x > 0 \Leftrightarrow -x > -2 \Leftrightarrow x < 2$

$$\Rightarrow x \in]-\infty, 2[$$

③ $\log_2(2-x) \neq 3$

$$2-x \neq 2^3$$

$$2-x \neq 8$$

$$-x \neq 6$$

$$x \neq -6$$

Besluit:

$$\text{dom } f =]-\infty, 0] \setminus \{-6\}$$

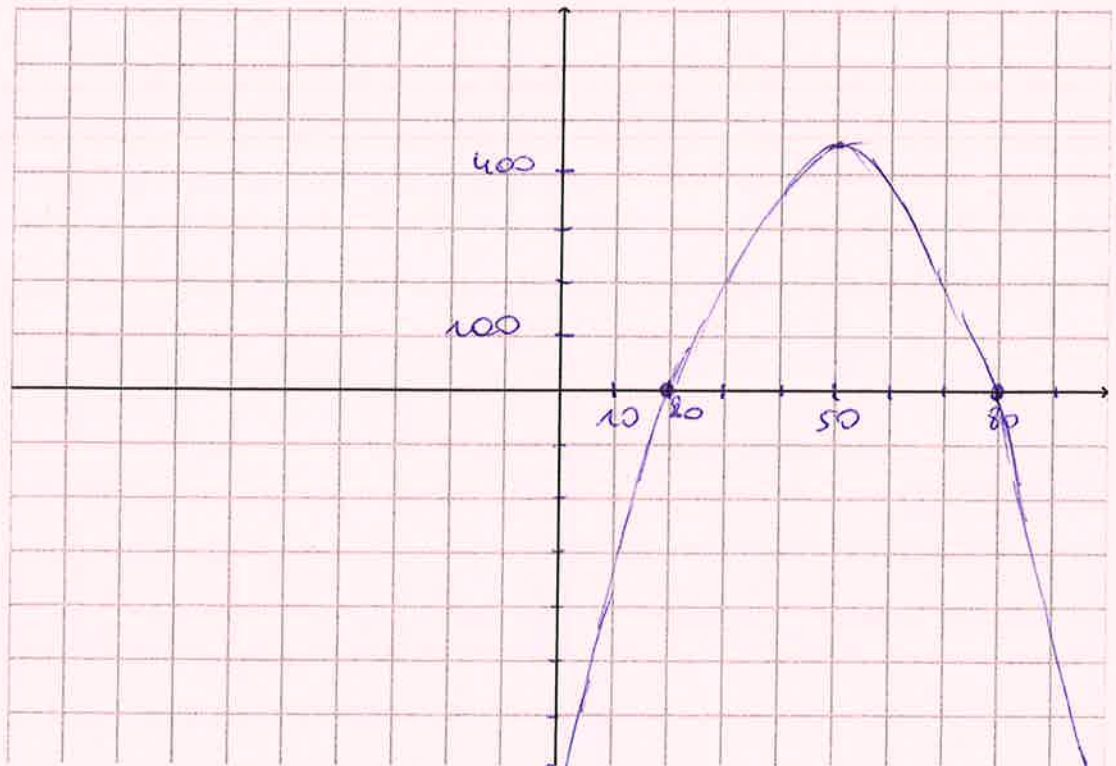
$$=]-\infty, -6[\cup]-6, 0]$$

3. Voor een bepaald consumptieartikel zijn de volgende verbanden gekend: $p = -\frac{1}{2}q + 55$ (prijs per eenheid) en $k = \frac{800}{q} + 5$ (kost per eenheid).

(a) 3 ptn Bepaal het voorschrift van de winst W als functie van q .

$$\begin{aligned} W(q) &= \text{Totale Opbrengsten} - \text{Totale Kosten} \\ &= \left(-\frac{1}{2}q + 55\right) \cdot q - \left(\frac{800}{q} + 5\right) \cdot q \\ &= -\frac{1}{2}q^2 + 55q - (800 + 5q) \\ &= -\frac{1}{2}q^2 + 50q - 800 \end{aligned}$$

(b) 5 ptn Stel deze winstfunctie grafisch voor.



Verklarende berekeningen:

• $a = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$ bergparabool $\Rightarrow$ top: $q = \frac{-b}{2a} = \frac{-50}{-1} = 50$

$W(50) = -\frac{1}{2} \cdot 2500 + 2500 - 800 = 450 \Rightarrow (50, 450)$

• snijpunt met verticale as: $(0, -800)$

• nulp: $D = b^2 - 4ac = 2500 - 1600 = 900$

$q_{1,2} = \frac{-50 \pm 30}{-1} \begin{matrix} 80 \\ 20 \end{matrix}$

4. 7 ptn Onderzoek voor welke waarde(n) van m de volgende functie een ophefbare discontinuïteit heeft in 0.

$$f(x) = \begin{cases} me^x & \text{als } x < 0 \\ \frac{x}{\sin mx} & \text{als } x > 0 \\ -1 & \text{als } x = 0 \end{cases} \rightarrow f(0) = -1.$$

f is ophefbaar disctn in 0 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \in \mathbb{R}$
maar $\neq f(0)$

$$LL = \lim_{x \rightarrow 0} m \cdot e^x = m \cdot e^0 = m \cdot 1 = m$$

$$RL = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin mx} \left(= \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin mx}{x} \right)^{-1}$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{mx} \cdot m \right)^{-1} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{mx} \right)^{-1} \cdot m^{-1} = \frac{1}{m}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=1}$

$$LL = RL \Leftrightarrow m = \frac{1}{m}$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow m = 1 \text{ of } m = -1$$

Antwoord: enkel voor $m = 1$ is f ophefbaar disctn in 0

(voor $m = -1 \rightarrow f$ is cont. in 0)

5. [8 ptn] Bepaal de asymptoten aan de grafiek van de volgende functie:

$$f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+4}}$$

1) géén VA, want dom $f = \mathbb{R}$

2) SA: $y = asc + b$

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+4}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x(2 - \frac{1}{x})}{x\sqrt{x^2+4}} \rightarrow \frac{2}{\pm\infty} = 0 \Rightarrow HA.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+4}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x(2 - \frac{1}{x})}{\sqrt{x^2(1 + \frac{4}{x^2})}}$$

geval 1: $x \rightarrow +\infty$:

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2 - \frac{1}{x})}{x\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}} = \frac{2}{1} = 2$$

geval 2: $x \rightarrow -\infty$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(2 - \frac{1}{x})}{-x(\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}})} = \frac{2}{-1} = -2$$

conclusie: HA: $y = 2$ op $+\infty$
 $y = -2$ op $-\infty$

géén VA.