

Examen: Wiskunde voor bedrijfskundigen II

BA/SCH Handelswetenschappen

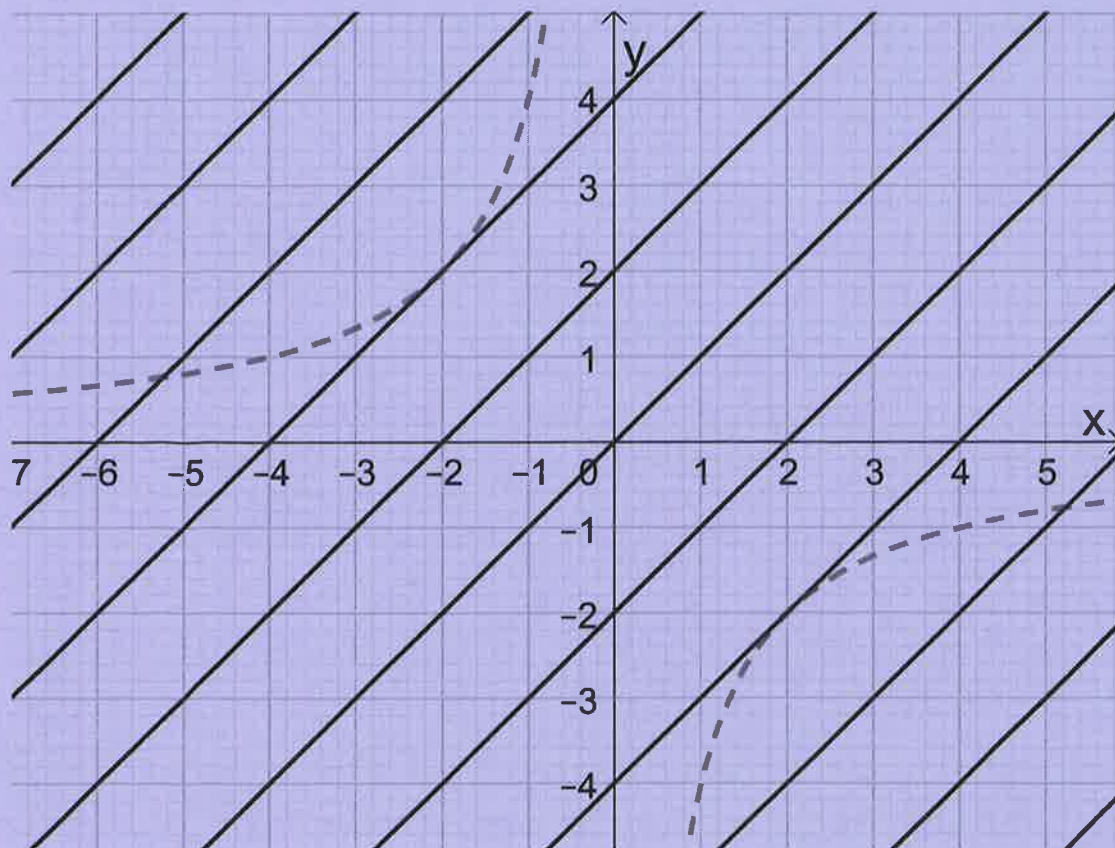
Academiejaar: 2017/2018

Zittijd: 2

- ☞ Totaal: op 50 punten.
- ☞ Duur van het examen: 3u.
- ☞ Het gebruik van een zakrekenmachine is NIET toegelaten. Laat getallen die je zonder rekenmachine niet kan berekenen gewoon staan (zoals bijvoorbeeld e^{-2} , $\log_2 \pi$, $\sqrt{3}$, etc.).
- ☞ Tenzij anders vermeld, kan je geen punten verdienen voor een eindresultaat zonder verklarende berekeningen of argumenten, zelfs als dat eindresultaat correct is.

1. (a) 3 ptn Geef de *definitie* van een inverse matrix van een vierkante matrix A .
- (b) 2 ptn **Gegeven:** X en Y zijn $(1 \times p)$ -matrices en $Q = (X^T X)^{-1} X \cdot Y^T$. **Gevraagd:** het formaat van Q , in de onderstelling dat deze matrix bestaat.
- (c) 5 ptn Beschouw het input-outputmodel met n industrietakken. Zij X en F de kolomvectoren van de totale outputs en de finale vraag per industrietak, en T de technologiematrix. Geef de input-outputvergelijkingen in matrixvorm (dus een vergelijking met X , T en F erin) en leid hieruit een formule af die X uitdrukt in functie van F .
2. 10 ptn Het aantal kopers $N(x)$ van een bepaald product is een functie van de uitgaven x , uitgedrukt in miljoen euro, voor reclame voor dat product. Er zijn 50.000 potentiële kopers van het product. Men verwacht dat het tempo waarmee het aantal kopers verandert met het reclamebudget evenredig is met het aantal personen dat het product nog niet gekocht heeft. De evenredigheidsconstante is r . Wordt er geen reclame gemaakt, dan raamt men het aantal kopers op 10.000.
 - (a) 2 ptn Stel de differentiaalvergelijking met randvoorwaarde van dit probleem op.
 - (b) 5 ptn Los dit randvoorwaardeprobleem expliciet op.
 - (c) 1 ptn Voor welke waarden van r bestaat $\lim_{x \rightarrow +\infty} N(x)$? Leg uit.
 - (d) 2 ptn Bereken r als er 30.000 kopers zijn bij een reclamebudget van $x = 2$.
3. 6 ptn Bepaal de reële waarde(n) van x opdat de matrix $\begin{bmatrix} x^2 & x^2 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ x^2 & 2x^2 & 3x^2 \end{bmatrix}$ een eigenvector zou hebben gelijk aan $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. (Hint: steun enkel op de definitie van een eigenvector.)
4. 14 ptn Gegeven: de functie $f(x, y) = e^{x-y}$ en de nevenvoorwaarde $xy = -b$ met $b > 0$.
 - (a) 6 ptn Bepaal de stationaire punten $(x^*(b), y^*(b), \lambda^*(b))$ van de Lagrangefunctie bij dit gebonden extremumprobleem.
 - (b) 2 ptn Wat is de vergelijking van de kromme waarop de punten $(x^*(b), y^*(b))$ liggen voor variabele b -waarden?

- (c) 2 ptn In Figuur 1 staan een aantal niveaulijnen van $f(x, y) = e^{x-y}$ getekend. Toon met berekeningen aan dat de niveaulijnen van f steeds rechten moeten zijn.
- (d) 2 ptn We stellen nu $b = 4$. In Figuur 1 staat ook de kromme van de nevenvoorwaarde $xy = -4$ in stippellijn getekend. Is het punt $P(-2, 2)$ een lokaal gebonden maximum of minimum? Verklaar **enkel** op basis van deze Figuur 1 en **niet** aan de hand van de Hessiaan.
- (e) 2 ptn We nemen opnieuw $b = 4$. Onderstel nu dat b met één tiende toeneemt, waardoor het lokaal gebonden extremum $P(-2, 2)$ opschuift. Met hoeveel zal de bijbehorende functiewaarde dan veranderen?



Figuur 1: niveaulijnen van $f(x, y) = e^{x-y}$ en de nevenvoorwaarde $xy = -4$

5. **10 ptn** Uitwerkingen moeten voor deze oefening niet worden gegeven.

Schrijf de juiste letter in het invulvak bovenaan pagina 5 in je antwoordbundel. De score op deze vraag wordt toegekend aan de hand van de volgende tabel.

Aantal correct beantwoorde items	0	1	2	3	4	5
Score	0	0	3	5	8	10

(a) Welke uitdrukking is in overeenstemming met de integraal $\int_2^5 \frac{x-5}{\ln(x-2)} dx$?

A: $\lim_{t \rightarrow 5} \int_2^t \frac{x-5}{\ln(x-2)} dx$

B: $\lim_{t \rightarrow 5} \int_2^t \frac{x-5}{\ln(x-2)} dx$

C: $\lim_{t \rightarrow 2} \int_t^5 \frac{x-5}{\ln(x-2)} dx$

D: $\lim_{t \rightarrow 2} \int_t^5 \frac{x-5}{\ln(x-2)} dx$

E: $\lim_{t \rightarrow 2} \int_t^5 \frac{x-5}{\ln(x-2)} dx$

(b) Gegeven is de singuliere matrix

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & 5\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} & 7\sqrt{2} & 8\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

met $\lambda = 6\sqrt{3} + 6\sqrt{2}$ als één van de eigenwaarden. Wat zijn dan de twee andere eigenwaarden van M ?

A: 0 en $6\sqrt{3} - 6\sqrt{2}$

B: 0 en $6\sqrt{2} + 6\sqrt{3}$

C: 0 en $6\sqrt{2} - 6\sqrt{3}$

D: $6\sqrt{3}$ en $6\sqrt{2}$

E: 0 en $12\sqrt{2}$

(c) Gegeven is een 3×3 matrix A met eigenwaarden $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ en $\lambda_3 = 4$ en corresponderende eigenvectoren $[t, t, -t]^T$, $[t, -2t, t]^T$ en $[3t, 5t, -3t]^T$, waarbij $t \neq 0$. Zij $\underline{u} = [4, -8, 4]^T$. De middelste component van de vector $A^4 \underline{u}$ is dan gegeven door:

A: -32

B: 32

C: 128

D: -128

E: -256

(d) Welke van de volgende functies $z = f(x, y)$ voldoet aan de volgende vergelijking?

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = f$$

A: $x^2 y^3$

B: x

C: $x^2 + y^2$

D: xy

E: $x + y + 1$

(e) Voor de functie $f(x, y) = x^3 - 12x + y^2$ geldt:

A: $(2, 0)$ is een lokaal minimum

B: $(2, 0)$ is een lokaal maximum

C: $(0, 0)$ is een lokaal minimum

D: $(0, 0)$ is een lokaal maximum

E: $(0, 0)$ is een zadelpunt

VRAAG 1.

Antwoord:

Uitwerking:

1b

$$\underbrace{\underbrace{(X^T X)^{-1}}_{p \times p} \underbrace{X Y^T}_{1 \times p}}_{p \times p} : \boxed{p \times p}$$

1c) Io-vgl. $\boxed{T \cdot X + F = X}$ 2pt

$$\begin{aligned} F &= X - T \cdot X \\ &= \underbrace{(E_n - T)}_{L} X \end{aligned}$$

2pt

$$\Downarrow$$

$$L^{-1} \cdot F = X$$

1pt

Vraag 2

$$N(0) = 10000$$

$$\frac{dN}{dx} = r(50000 - N)$$

$$\int \frac{dN}{50000 - N} = \int r dx \Leftrightarrow -\ln|50000 - N| = rx + C \quad C \in \mathbb{R}$$

$\neq 0$

$$\Leftrightarrow \ln|50000 - N| = -rx - C$$

$$\Leftrightarrow |50000 - N| = e^{-rx - C} = C_1 \cdot e^{-rx} \quad C_1 \in \mathbb{R}_0^+$$

$$\Leftrightarrow 50000 - N = C_2 e^{-rx} \quad C_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow N = 50000 - C_2 e^{-rx} \quad C_2 \in \mathbb{R}_0 \quad \text{A.O.}$$

SO: $N = 50000$ voldoet ook aan de vgl

Besluit: alle oplossingen

$$N = 50000 - C e^{-rx} \quad C \in \mathbb{R}$$

PO: $N(0) = 10000 \Leftrightarrow C e^{-r \cdot 0} = 40000 \Leftrightarrow C = 40000$

(c) N convergeert als $\lim_{x \rightarrow +\infty} N(x) \in \mathbb{R}$

d.w.z: $r \geq 0$

(d) $N(2) = 30000$

$$N(2) = 30000 = 50000 - 40000 e^{-2r}$$

$$\Leftrightarrow 40000 e^{-2r} = 20000$$

$$\Leftrightarrow e^{-2r} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -2r = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{\ln 2}{2}$$

$$\begin{bmatrix} x^2 & x^2 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ x^2 & 2x^2 & 3x^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x^2 + 1 = \lambda \\ 1 + x = \lambda \\ x^2 + 2x^2 + 3x^2 = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 1 = \lambda & (1) \\ 1 + x = \lambda & (2) \\ 6x^2 = \lambda & (3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) - (2) & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x = 0 \\ 1 + x = \lambda \\ 6x^2 = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = \frac{1}{2} \\ 1 + x = \lambda \\ 6x^2 = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = 1 \\ \lambda = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} = \lambda \\ \frac{6}{4} = \lambda \end{cases} \end{aligned}$$

↳ strijdig stelsel

Besluit: $x = \frac{1}{2}$ en $\lambda = \frac{3}{2}$

Vraag 4

$$f(x, y) = e^{x-y} \quad \text{met } xy = -b \quad b > 0$$

$$a \quad \mathcal{L}(x, y, \lambda) = e^{x-y} - \lambda(xy + b)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = e^{x-y} - \lambda y = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -e^{x-y} - \lambda x = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -(xy + b) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1)+(2) \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \quad \begin{cases} -\lambda(y+x) = 0 \\ e^{x-y} + \lambda x = 0 \\ xy + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ e^{x-y} = 0 \quad (*) \\ xy + b = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -x \quad (**) \\ e^{2x} + \lambda x = 0 \\ -x^2 + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \mp \sqrt{b} \\ \lambda = \frac{-e^{\pm 2\sqrt{b}}}{\pm \sqrt{b}} \\ x = \pm \sqrt{b} \end{cases}$$

() is strijdig* ST van f : $(+\sqrt{b}, -\sqrt{b}); (-\sqrt{b}, \sqrt{b})$

b Uit $(**)$ volgt dat de ST liggen op de 1^o bissectrice $y = -x$

$$(c) \quad f(x, y) = e^{x-y}$$

Elke niveaulijn wordt gegeven door
 $e^{x-y} = c$ met $c \in \mathbb{R}_0^+$

$$\Leftrightarrow x - y = \ln c$$

$$\Leftrightarrow x - \ln c = y \quad \text{Vgl niv.lijnen } y = x - \ln c$$

$$(d) \quad c = 1 \quad y = x : \text{ rechte door } 0$$

$$c = e^{-2} \quad y = x + 2 \quad \text{rechte door } (-2, 0)$$

$$c = e^{-6} \quad y = x + 6 \quad \text{rechte door } (-6, 0)$$

Hoe meer de niveaulijnen naar links gaan, hoe lager het niveau. De restrictie raakt een niveaulijn in $(-2, 2)$ een maximum

$$e \quad b = 4 \quad \text{geval } SP(\sqrt{b}, -\sqrt{b}) \parallel SP(-\sqrt{b}, \sqrt{b})$$

$$f^*(x, y) = e^{2\sqrt{b}} \quad \parallel \quad f^*(x, y) = e^{-2\sqrt{b}}$$

$$\frac{df^*}{db} = e^{2\sqrt{b}} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{b}} = \frac{e^{2\sqrt{b}}}{\sqrt{b}} \quad \parallel \quad \frac{df^*}{db} = e^{-2\sqrt{b}} \cdot (-2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{b}}$$

$$= -\lambda \quad \parallel \quad = -\frac{e^{-2\sqrt{b}}}{\sqrt{b}}$$

$$\text{Voor } b = 4 \text{ vinden we in } (-2, 2)$$

$$= -\frac{e^{-4}}{20} \quad db = 0,1 \quad \parallel \quad = -\frac{e^{-4}}{2}$$

FAMILIENAAM:

VOORNAAM:

VRAAG 5.

Antwoord:

Uitwerking:

C C D B A