

Werkcollege 10: hoofdstuk 8

Oefening 8.1

$$1. \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & 2 & & 3 & & 0 & & 13 \\ \hline 2. & 1 & +3 & -2 & -2 & 3 & = & -10 \\ \hline & 0 & & 1 & & 2 & & -1 \\ \hline \end{array}$$

$$2. \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & 2 & & 3 & & 0 & & 4 \\ \hline - & 1 & +2 & -2 & +3 & 3 & = & 4 \\ \hline & 0 & & 1 & & 2 & & 8 \\ \hline \end{array}$$

$$3. \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & 2 & & 3 & & 0 & & 2m-3 \\ \hline m & 1 & - & -2 & +n & 3 & = & m+2+3n \\ \hline & 0 & & 1 & & 2 & & -2+2n \\ \hline \end{array}$$

$$4. \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & 2 & & 3 & & 0 & & 14 \\ \hline k & 1 & +l & -2 & +m & 3 & = & 8 \\ \hline & 0 & & 1 & & 2 & & 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} & 2k + 3l = 14 \quad (1) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} k + 2l + 3m = 8 & (2) \\ l + 2m = 6 & (3) \end{cases} \end{aligned}$$

$$(1) \quad k = \frac{14-3l}{2}$$

$$(3) \quad m = \frac{6-l}{2}$$

(1) en (3) in (2)

$$7 - \frac{3}{2}l - 2l + 9 - \frac{3}{2}l = 8$$

$$\Leftrightarrow -5l = -8 \quad \Leftrightarrow l = \frac{8}{5}$$

$$\text{dan is } k = \frac{14 - 24/5}{2}$$

$$= \frac{70 - 24}{10}$$

$$= \frac{46}{10} = \frac{23}{5}$$

$$\text{en } m = 6 - 8/5$$

$$= \frac{30 - 8}{10}$$

$$= \frac{11}{5}$$

Oefening 8.2

$$k \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + l \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2k + l + 3m = 3 & (1) \\ 3k - l = -7 & (2) \\ -k + l - m = 1 & (3) \end{cases}$$

$$(2) \quad l = 3k + 7$$

$$(2) \text{ in } (3) \quad -k + 3k + 7 - m = 1$$

$$\Leftrightarrow m = 2k + 6$$

$$(2) \text{ en } (3) \text{ in } (1)$$

$$2k + 3k + 7 + 6k + 18 = 3$$

$$\Leftrightarrow 11k = -22$$

$$\Leftrightarrow k = -2$$

$$\begin{aligned} \text{dan is } m &= 2(-2) + 6 \\ &= -4 + 6 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{en } l &= 3(-2) + 7 \\ &= -6 + 7 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Oefening 8.5

$$1. \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{bmatrix}$$

karakteristieke vergelijking:

$$\det(A - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & - & \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & - & 0 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 0 & - & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & | & -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & | & 1 & -\lambda \\ 1 & 1 & -\lambda & | & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow 0 = -\lambda^3 + 1 + 1 - (-\lambda - \lambda - \lambda)$$

$$\Rightarrow 0 = -\lambda^3 + 2 + 3\lambda$$

$$\Rightarrow 0 = (\lambda + 1)(-\lambda^2 + \lambda + 2)$$

$$\Rightarrow 0 = (\lambda + 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2)$$

$$\begin{array}{r} -\lambda^3 + 0\lambda^2 + 3\lambda + 2 \quad | \quad \lambda + 1 \\ \underline{+\lambda^3 + \lambda^2} \quad \quad \quad -\lambda^2 + \lambda + 2 \\ \lambda^2 + 3\lambda + 2 \\ \underline{-\lambda^2 - \lambda} \quad \quad \quad 2\lambda + 2 \\ \underline{-2\lambda - 2} \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$\lambda_2 = \frac{-1 \pm 3}{-2}$$

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 2$$

→ eigenwaarden: $\lambda_1 = -1$ en $\lambda_2 = 2$.

eigenvektoren:

$$\lambda_1 = -1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

stel $x = r$ en $y = s$

$$z = -x - s$$

$$\rightarrow \text{eigenvektoren: } r \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (r, s \in \mathbb{R}_0)$$

$$\lambda_2 = 2 \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 & (1) \Rightarrow y = -z + 2x \\ x - 2y + z = 0 & (2) \\ x + y - 2z = 0 & (3) \end{cases}$$

stel $x = t$

$$(1) \text{ in } (3) \quad t - z + 2t - 2z = 0$$

$$\Leftrightarrow 3t - 3z = 0$$

$$\Leftrightarrow z = t$$

$$\text{en dan is } y = -t + 2t = t$$

-eigenvector: $t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}_0)$

$$2. \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+3y \\ x-z \\ y+z \end{bmatrix}$$

karakteristieke vergelijking:

$$A - \lambda E_3 = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E_3) = (1-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda) - ((1-\lambda) + (1-\lambda)3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda) + (1-\lambda) - 3(1-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda) + 1 - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0$$

$$\hookrightarrow D = 9$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$\rightarrow \lambda_2 = \frac{1 \pm 3}{2} \quad \lambda_2 = -1$$

-eigenwaarden: $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = 2$ en $\lambda_3 = -1$

eigenvectoren:

$$\lambda_1 = 1 \quad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 0 & (1) \rightarrow y = 0 \\ x - y - z = 0 & (2) \rightarrow x = x - y \\ y = 0 & (3) \end{cases}$$

stel $x=x$

$$x = x - 0 = x$$

→ eigenvector: $x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (x \in \mathbb{R}_0)$

$$\lambda_2 = 2 \quad \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y = 0 & (1) \rightarrow x = 3y \\ x - 2y - z = 0 & (2) \\ y - z = 0 & (3) \rightarrow y = z \end{cases}$$

stel $x=s$

$$s = 3y$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{3}s$$

→ eigenvector: $s \begin{bmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}_0)$

$$\lambda_3 = -1 \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 0 & (1) \rightarrow y = -\frac{2}{3}x \\ x + y - z = 0 & (2) \\ y + 2z = 0 & (3) \rightarrow z = -\frac{1}{2}y \end{cases}$$

stel $x=t$

dan is $y = -\frac{2}{3}t$

en $z = \frac{1}{3}t$

→ eigenwector: $t \begin{bmatrix} 1 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}_0)$

Samengevat:

$\lambda_1 = 1: x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ en $\lambda_2 = 2: s \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ en $\lambda_3 = -1: t \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (x, s, t \in \mathbb{R}_0)$

3. $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x+3y \\ -2x-2y \end{bmatrix}$

karakteristieke vergelijking:

$$\begin{bmatrix} 5-\lambda & 3 \\ -2 & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow \det(K_v) = (5-\lambda)(-2-\lambda) + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow -10 - 5\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

$$\hookrightarrow D = 9 + 16 = 25$$

$$\hookrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{2} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix}$$

→ eigenwaarden: $\lambda_1 = -1$ en $\lambda_2 = 4$

eigenwectoren:

$$\lambda_1 = -1 \quad \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 3y = 0 \\ -2x - y = 0 \end{cases}$$

stel $x = \pi$

$$6\pi + 3y = 0$$

$$\Leftrightarrow y = -2\pi$$

-> eigenvector: $\pi \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (\pi \in \mathbb{R}_0)$

$$\lambda_2 = 4 \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 0 \\ -2x - 6y = 0 \end{cases}$$

stel $x = \lambda$

$$\lambda + 3y = 0$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}\lambda$$

-> eigenvector: $\lambda \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R}_0)$

Samengevat:

$$\lambda_1 = -1: \pi \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \lambda_2 = 4: \lambda \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$4 \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y+3z \\ 2x+3y+6z \\ 3x+6y+8z \end{bmatrix}$$

karacteristieke vergelijking:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 3-\lambda & 6 \\ 3 & 6 & 8-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \det(A - \lambda I) &= (-\lambda)(3-\lambda)(8-\lambda) + 36 + 36 - (9(3-\lambda) - 36\lambda + 4(8-\lambda)) = 0 \\ \Leftrightarrow (-\lambda)(24 - 11\lambda + \lambda^2) + 72 - (27 - 9\lambda - 36\lambda + 32 - 4\lambda) &= 0 \\ \Leftrightarrow -24\lambda + 11\lambda^2 - \lambda^3 + 72 - 59 + 49\lambda &= 0 \\ \Leftrightarrow -\lambda^3 + 11\lambda^2 + 25\lambda + 13 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 11 & 25 & 13 \\ -1 & 1 & -12 & -13 & \\ \hline & -1 & 12 & 13 & 0 \end{array}$$

$$\rightarrow -\lambda^2 + 12\lambda + 13$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+1)(-\lambda^2+12\lambda+13)=0$$

$$\hookrightarrow D = 144 + 52 = 196$$

$$\rightarrow \lambda_1 = \frac{-12 \pm 14}{-2} \quad \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 13 \end{cases}$$

$\rightarrow$ eigenwaarden: $\lambda_1 = -1$ en $\lambda_2 = 13$

eigenvectoren:

$$\lambda_1 = -1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 & (1) \\ 2x+4y+6z=0 & (2) \\ 3x+6y+9z=0 & (3) \end{cases}$$

stel $y=\pi$

$$(1) \quad x = -2\pi - 3z$$

stel $z=s$

$$(1) \quad x = -2\pi - 3s$$

-> eigenvector: π $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(\pi, s \in \mathbb{R}_0)$

$$\lambda_2 = 13 \quad \begin{bmatrix} -13 & 2 & 3 \\ 2 & -10 & 6 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -13x+2y+3z=0 & (1) \quad -> y = \frac{-3z+13x}{2} \\ 2x-10y+6z=0 & (2) \\ 3x+6y-5z=0 & (3) \end{cases}$$

stel $x=t$

$$(1) \quad y = \frac{-3z+13t}{2}$$

$$\begin{aligned} (1) \text{ in } (2) \quad 2t + 15z - 65t + 6z &= 0 \\ &\Rightarrow -63t + 21z = 0 \\ &\Rightarrow z = \frac{63t}{21} = 3t \end{aligned}$$

$$\text{en } y = \frac{-9s + 13s}{2} = \frac{4}{2}s = 2s$$

$$\rightarrow \text{eigenvector: } t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}_0)$$

$$5. \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5x + 3y \\ 4x + 3y \end{bmatrix}$$

Karakteristieke vergelijking:

$$\begin{bmatrix} -5-\lambda & 3 \\ 4 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow \det(P_\lambda) = (-5-\lambda)(3-\lambda) - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow -15 + 5\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 27 = 0$$

$$\hookrightarrow D = 4 - 108 = -104$$

$$\rightarrow \lambda_1 = \frac{-2 \pm 4\sqrt{7}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{7} = \lambda_1$$

$$\rightarrow \text{eigenwaarden: } \lambda_1 = -1 + 2\sqrt{7} \text{ en } \lambda_2 = -1 - 2\sqrt{7}$$

eigenvectoren:

$$\lambda_1 = -1 + 2\sqrt{7} \quad \begin{bmatrix} -4 - 2\sqrt{7} & 3 \\ 4 & 4 - 2\sqrt{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-4 - 2\sqrt{7})x + 3y = 0 \\ 4 + (4 - 2\sqrt{7})y = 0 \end{cases}$$

$$\text{stel } x = \pi$$

$$y = \frac{4+2\sqrt{7}}{3} \pi$$

$$\rightarrow \text{eigenvector: } \pi \begin{bmatrix} 1 \\ 4+2\sqrt{7}/3 \end{bmatrix} \quad (\pi \in \mathbb{R}_0)$$

$$\lambda_2 = -1-2\sqrt{7} \quad \begin{bmatrix} -4+2\sqrt{7} & 3 \\ 4 & 4+2\sqrt{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-4+2\sqrt{7})x + 3y = 0 \\ 4x + (4+2\sqrt{7})y = 0 \end{cases}$$

stel $x = s$

$$y = \frac{4-2\sqrt{7}}{3} s$$

$$\rightarrow \text{eigenvector: } s \begin{bmatrix} 1 \\ 4-2\sqrt{7}/3 \end{bmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}_0)$$

Samengesteld

$$\lambda_1 = -1+2\sqrt{7}: \pi \begin{bmatrix} 1 \\ 4+2\sqrt{7}/3 \end{bmatrix} \text{ en } \lambda_2 = -1-2\sqrt{7}: s \begin{bmatrix} 1 \\ 4-2\sqrt{7}/3 \end{bmatrix} \quad (\pi, s \in \mathbb{R}_0)$$

$$6. \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

karacteristieke vergelijking:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -4 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

→ eigenwaarden: $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = 3$

eigenvectoren:

$$\lambda_1 = 1 \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 + 0 = 0 \\ -4x + 2y = 0 \end{cases}$$

stel $x = \pi$

$$y = 2\pi$$

→ eigenvector: $\pi \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (\pi \in \mathbb{R}_0)$

$$\lambda_2 = 3 \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 0 = 0 & \Leftrightarrow x_1 = 0 \\ -4x + 0 = 0 & \Leftrightarrow x_2 = 0 \end{cases}$$

→ eigenvector: $s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}_0)$

Samengesteld:

$$\lambda_1 = 1: \pi \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ en } \lambda_2 = 3: s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\pi, s \in \mathbb{R}_0)$$

$$7. \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

karakteristieke vergelijking:

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow \det(A) = (4-\lambda)(3-\lambda) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 12 - 4\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 8 = 0$$

$$\hookrightarrow D = 49 - 32 = 17$$

$$\rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\rightarrow \text{eigenwaarden: } \lambda_1 = \frac{7 + \sqrt{17}}{2} \text{ en } \lambda_2 = \frac{7 - \sqrt{17}}{2}$$

eigenvectoren:

$$\lambda_1 = \frac{7 + \sqrt{17}}{2} \quad \begin{bmatrix} \frac{1 - \sqrt{17}}{2} & 2 \\ 2 & \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{17}}{2}x + y = 0 \\ 2x + \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}y = 0 \end{cases}$$

stel $x = r$

$$y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}$$

→ eigenvector: $\pi \begin{bmatrix} 1 \\ (-1+\sqrt{7})/4 \end{bmatrix} \quad (\pi \in \mathbb{R}_0)$

$$\lambda_2 = \frac{7-\sqrt{7}}{2} \quad \begin{bmatrix} (1+\sqrt{7})/2 & 1 \\ 2 & (-1+\sqrt{7})/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1+\sqrt{7})/2 x + 2y = 0 \\ 2x + (-1+\sqrt{7})/2 y = 0 \end{cases}$$

stel $x=s$

$$y = \frac{-1-\sqrt{7}}{4} s$$

→ eigenvector: $s \begin{bmatrix} 1 \\ (-1-\sqrt{7})/2 \end{bmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}_0)$

Samengevat:

$$\lambda_1 = \frac{7+\sqrt{7}}{2} : \pi \begin{bmatrix} 1 \\ (-1+\sqrt{7})/4 \end{bmatrix} \text{ en } \lambda_2 = \frac{7-\sqrt{7}}{2} : s \begin{bmatrix} 1 \\ (-1-\sqrt{7})/2 \end{bmatrix} \quad (\pi, s \in \mathbb{R}_0)$$

$$8. \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ -2y \\ 3x-6z \end{bmatrix}$$

karakteristieke vergelijking:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 3 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & -6-\lambda \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow \det(KV) = (-\lambda)(-2-\lambda)(-6-\lambda) - (9(-2-\lambda)) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-\lambda)(2\lambda + 12 + 6\lambda + \lambda^2) + 18 + 9\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\lambda^2 - 12\lambda - 6\lambda^2 - \lambda^3 + 18 + 9\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 + 8\lambda^2 + 3\lambda - 18 = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 8 & 3 & -18 \\ -2 & 1 & -2 & -12 & 18 \\ \hline & 1 & 6 & -9 & 0 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + 2)(\lambda^2 + 6\lambda - 9) = 0$$

$$\Delta = 36 + 36 = 72$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm 6\sqrt{2}}{2} = -3 \pm 3\sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ eigenwaarden: $\lambda_1 = -3 + 3\sqrt{2}$ en $\lambda_2 = -3 - 3\sqrt{2}$ en $\lambda_3 = -2$

eigenvectoren:

$$\lambda_1 = -3 + 3\sqrt{2} \quad \begin{bmatrix} 3 - 3\sqrt{2} & 0 & 3 \\ 0 & 1 - 3\sqrt{2} & 0 \\ 3 & 0 & -3 - 3\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3 - 3\sqrt{2})x + 3z = 0 & (1) \\ (1 - 3\sqrt{2})y = 0 & (2) \Rightarrow y = 0 \\ 3x + (-3 - 3\sqrt{2})z = 0 & (3) \end{cases}$$

stel $z = \pi$

$$(3) \quad x = 1 + \sqrt{2}\pi$$

$\Rightarrow$ eigenvector: $\pi \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\pi \in \mathbb{R}_0)$

$$\lambda_2 = -3 - 3\sqrt{2} \quad \begin{bmatrix} 3+3\sqrt{2} & 0 & 3 \\ 0 & 1+3\sqrt{2} & 0 \\ 3 & 0 & -3+3\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3+3\sqrt{2})x + 3z = 0 & (1) \\ (1+3\sqrt{2})y = 0 & (2) \quad -oy = 0 \\ 3x + (-3+3\sqrt{2})z = 0 & (3) \end{cases}$$

stel $z = s$

$$(3) \quad x = 1 - \sqrt{2} s$$

$$\rightarrow \text{eigenvector: } s \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}_0)$$

$$\lambda_3 = -2 \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3z = 0 \\ 0 = 0 \\ 3x - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{eigenvector: } t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}_0)$$

Samengesteld:

$$\lambda_1 = -3 + 3\sqrt{2}, \pi \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{en } \lambda_2 = -3 - 3\sqrt{2}, s \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{en } \lambda_3 = -2, t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(\pi, s, t \in \mathbb{R}_0)$$

Oefening 8.6

$$1. \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

karakteristieke vergelijking:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow \det(K_v) = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

$$\hookrightarrow D = 25$$

$$\rightarrow \lambda_1 = \frac{3 \pm 5}{2} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix}$$

→ eigenwaarden: $\lambda_1 = 4$ en $\lambda_2 = -1$

eigenvectoren:

$$\lambda_1 = 4 \quad \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -3x + 2y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

stel $x = \pi$

$$y = \frac{3}{2}\pi$$

→ eigenvector: $\pi \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (\pi \in \mathbb{R}_0)$

$$\lambda_2 = -1 \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases}$$

stel $x = s$

$$y = -s$$

$$\rightarrow \text{eigenvector: } s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}_0)$$

Samengesteld:

$$\lambda_1 = 4: r \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ en } \lambda_2 = -1: s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (r, s \in \mathbb{R}_0)$$

$$2. \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

karakteristieke vergelijking:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow \det(P_{\lambda}) = \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \pm 1$$

$$\rightarrow \text{eigenwaarden: } \lambda_1 = 1 \text{ en } \lambda_2 = -1$$

eigenvectoren:

$$\lambda_1 = 1 \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

stel $x = \pi$

$$y = \pi$$

$\rightarrow$ eigenvector: $\pi \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\pi \in \mathbb{R}_0)$

$$\lambda_2 = -1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

stel $x = s$

$$y = -s$$

$\rightarrow$ eigenvector: $s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}_0)$

Samengevat:

$\lambda_1 = 1$: $\pi \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ en $\lambda_2 = -1$: $s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (\pi, s \in \mathbb{R}_0)$

3. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

karakteristieke vergelijking:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow \det(K_v) = (1-\lambda)(-1-\lambda) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -1 - \lambda + \lambda + \lambda^2 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = -1$$

$\rightarrow$ kan niet, geen reële eigenwaarden

4. $\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$

karakteristieke vergelijking:

$$\begin{bmatrix} -3-\lambda & 1 & -1 \\ -7 & 5-\lambda & -1 \\ -6 & 6 & -2-\lambda \end{bmatrix} \begin{array}{l} -3-\lambda & 1 \\ -7 & 5-\lambda \\ -6 & 6 \end{array}$$

$$\hookrightarrow \det(K_v) = (-3-\lambda)(5-\lambda)(-2-\lambda) + 6 + 42 - (6(5-\lambda) - 6(-3-\lambda) - 7(-2-\lambda)) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-15 + 3\lambda - 5\lambda + \lambda^2)(-2-\lambda) + 48 - (30 - 6\lambda + 18 + 6\lambda + 14 + 7\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow 30 - 6\lambda + 10\lambda - 2\lambda^2 + 15\lambda - 3\lambda^2 + 5\lambda^2 - \lambda^3 + 48 - 7\lambda - 62 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + 12\lambda + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+2)(-\lambda^2+2\lambda+8) = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 0 & 12 & 16 \\ -2 & 1 & 2 & -4 & -16 \\ \hline & -1 & 2 & 8 & 0 \end{array}$$

$$\hookrightarrow D = 36$$

$$\rightarrow \lambda_1 = \frac{-2 \pm 6}{-2}$$

$$\lambda_1 = -2$$

$$\lambda_2 = 4$$

$$\rightarrow (-\lambda^2 + 2\lambda + 8)$$

→ eigenwaarden: $\lambda_1 = -2$ en $\lambda_2 = 4$

eigenvectoren:

$$\lambda_1 = -2 \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - z = 0 & (1) \\ -7x + 7y - z = 0 & (2) \\ -6x + 6y = 0 & (3) \end{cases} \quad \begin{aligned} (2) \quad -0z &= -7x + 7y \\ (3) \quad -0y &= x \end{aligned}$$

stel $x = \pi$

$$(3) \quad y = \pi$$

$$(2) \quad x = -7\pi + 7\pi = 0$$

$$\rightarrow \text{eigenvector: } \pi \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\pi \in \mathbb{R}_0)$$

$$\lambda_2 = 4 \quad \begin{bmatrix} -7 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -1 \\ -6 & 6 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -7x + y - z = 0 \\ -7x + y - z = 0 \\ -6x + 6y - 6z = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{eigenvector: } \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R}_0)$$

Samengevat: $\lambda_1 = -2: \pi \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ en $\lambda_2 = 4: \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\pi, \lambda \in \mathbb{R}_0)$

$$5. \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

karakteristieke vergelijking:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 & | & -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & | & 1 & -\lambda \\ 1 & 1 & -\lambda & | & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow \det(KV) = -\lambda^3 + 1 + 1 - ((-\lambda) + (-\lambda) + (-\lambda)) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + 2 + 3\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc} & -1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\hookrightarrow -\lambda^2 + \lambda + 2$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + 1)(-\lambda^2 + \lambda + 2) = 0$$

$$\hookrightarrow D = 9$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{-1 \pm 3}{-2}, \lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = 2$$

$\rightarrow$ eigenwaarden: $\lambda_1 = -1$ en $\lambda_2 = 2$

eigenvectoren:

$$\lambda_1 = -1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

stel $x=\pi$ en $y=s$

$$\begin{aligned} z &= -x-y \\ &= -\pi-s \end{aligned}$$

$\rightarrow$ eigenvector: $\pi \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (\pi, s \in \mathbb{R}_0)$

$$\lambda_2 = 2 \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y+z=0 & (1) \rightarrow y=2x-z \\ x-2y+z=0 & (2) \rightarrow z=2y-x \\ x+y-2z=0 & (3) \end{cases}$$

stel $x=t$

$$(1) y=2t-z$$

$$(2) z=4t-2z-t$$

$$\Leftrightarrow 3z=3t$$

$$\Leftrightarrow z=t$$

$$(1) y=2t-t$$

$$y=t$$

$\rightarrow$ eigenvector: $t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}_0)$

Samengevat:

$$\lambda_1 = -1: \pi \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ en } \lambda_2 = 2: t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\pi, s, t \in \mathbb{R}_0)$$

Oefening 8.7

$$1. \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^7 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Theoretische toelichting

$$A \cdot X = \lambda \cdot X$$

als λ een eigenwaarde is van A én $X =$ eigenvector van A ,
behorend bij eigenwaarde λ

$$\rightarrow A^n \cdot X = \lambda^n \cdot X$$

stap 1: eigenwaarde en eigenvectoren

$$\lambda_1 = 4: \pi \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} (\vec{v}_1) \text{ en } \lambda_2 = -1: s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} (\vec{v}_2) \quad (\pi, s \in \mathbb{R}_0)$$

$\rightarrow$ zie oefening 8.6

stap 2: schrijf B als lineaire combinatie van de eigenvectoren

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2c_1 + c_2 = 3 & (1) \\ 3c_1 - c_2 = 2 & (2) \end{cases}$$

(1) + (2)

$$0.5 = 5C_1$$

$$\Rightarrow C_1 = 1$$

$$\text{en } C_2 = 1$$

dues:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

step 3:

$$A^T \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = A^T \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= A^T \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + A^T \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= 4^T \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1)^T \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 32 & 768 \\ 49 & 152 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 32 & 767 \\ 49 & 153 \end{bmatrix}$$

$$2. \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{10} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

stap 1: eigenwaarden en eigenvectoren

$$\lambda_1 = \pi \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ en } \lambda_2 = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\pi, s, t \in \mathbb{R}_0)$$

stap 2: schrijf B als lineaire combinatie van de eigenvectoren

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_3 = 4 & (1) \rightarrow c_1 = 4 - c_3 \\ c_2 + c_3 = 2 & (2) \rightarrow c_2 = 2 - c_3 \\ -c_1 - c_2 + c_3 = 3 & (3) \end{cases}$$

(1) en (2) in (3)

$$-4 + c_3 - 2 + c_3 + c_3 = 3$$

$$\Leftrightarrow 3c_3 = 9$$

$$\Leftrightarrow c_3 = 3$$

$$\text{en } c_1 = 4 - 3 = 1$$

$$c_2 = 2 - 3 = -1$$

dus:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

step 3:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{10} \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix} = A^{10} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= (-1)^{10} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + (-1)^{10} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \cdot 2^{10} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3072 \\ 3072 \\ 3072 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3073 \\ 3071 \\ 3072 \end{bmatrix}$$

$$3. \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^5 \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

step 1: eigenwaarden en eigenvectoren

characteristische vergelijking:

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \det(K_v) &= (3-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda) + (1-\lambda) = 0 \\ (\Rightarrow) & (1-\lambda)((3-\lambda)(1-\lambda) + 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(3-3\lambda-\lambda+\lambda^2+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+4)=0$$

$$\Delta D = 16 - 16 = 0 \text{ (dubbel nulpunt)}$$

$$\rightarrow \lambda_1 = \frac{4 \pm 0}{2} = 2$$

$\rightarrow$ eigenwaarden: $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = 2$

eigenvectoren:

$$\lambda_1 = 1 \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 & (1) \\ 0 = 0 & (2) \\ x - y = 0 & (3) \rightarrow y = x \end{cases}$$

stel $x = \pi$

$$y = \pi$$

$$\text{en (3) in (1): } 2\pi - \pi - z = 0$$

$$\Leftrightarrow \pi - z = 0$$

$$\Leftrightarrow z = \pi$$

$$\rightarrow \text{eigenvector: } \pi \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\pi \in \mathbb{R}_0)$$

$$\lambda_2 = 2 \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y-z=0 & (1) \rightarrow z=x-y \\ -y=0 & (2) \rightarrow y=0 \\ x-y-z=0 & (3) \end{cases}$$

stel $x=s$

$$(1) \quad x=s-0 \\ z=s$$

→ eigenvector: $s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}_0)$

Samengevat:

$$\lambda_1 = 1: \pi \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \lambda_2 = 2: s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\pi, s \in \mathbb{R}_0)$$

stap 2: schrijf B als lineaire combinatie van de eigenvectoren

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = -3 & (1) \rightarrow c_2 = -3 - c_1 \\ c_1 = -5 & (2) \rightarrow c_1 = -5 \\ c_1 + c_2 = -3 & (3) \end{cases}$$

(2) in (1)

$$c_2 = -3 - (-5) = -3 + 5 = 2.$$

step 3:

$$A^5 \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix} = A^5 \left((-5) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= 1^5 (-5) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2^5 \cdot 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 64 \\ 0 \\ 64 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 59 \\ -5 \\ 59 \end{bmatrix}$$

Opdring 8.8

volg. per.

nr	I	II
I	0,7	0,3
II	0,4	0,6

begin situatie: $P_0 = \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{bmatrix}$

overgangsmatrix:

$$P = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 \end{bmatrix}$$

2. karakteristieke vergelijking:

$$\begin{bmatrix} 0,7-\lambda & 0,4 \\ 0,3 & 0,6-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow \det(KV): \begin{vmatrix} 0,7-\lambda & 0,4 \\ 0,3 & 0,6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$R_1 = R_1 + R_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0,3 & 0,6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0,3 & 0,6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda) (0,6-\lambda-0,3) = 0$$

$\rightarrow$ eigenwaarden: $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = 0,3$

eigenvectoren:

$$\lambda_1 = 1 \quad \begin{bmatrix} -0,3 & 0,4 \\ 0,3 & -0,4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -0,3x + 0,4y = 0 & (1) \\ 0,3x - 0,4y = 0 \end{cases}$$

stel $x = \pi$

$$(1) \quad y = \frac{3}{4}\pi$$

$\rightarrow$ eigenvector: $\pi \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (\pi \in \mathbb{R}_0)$

$$\lambda_2 = 0,3 \quad \begin{bmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,4x + 0,4y = 0 \\ 0,3x + 0,3y = 0 \end{cases}$$

stel $x = s$

$$y = -s$$

$$\rightarrow \text{eigenvector: } s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}_0)$$

Samengevat:

$$\lambda_1 = 1, x \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ en } \lambda_2 = 0,3 : s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (x, s \in \mathbb{R}_0)$$

$$3. \quad \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{bmatrix}$$

begin situatie als lineaire combinatie van de eigenvectoren

$$\begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4c_1 + c_2 = 0,7 & (1) \\ 3c_1 - c_2 = 0,3 & (2) \end{cases} \rightarrow c_2 = 0,7 - 4c_1$$

$$(1) + (2): 7c_1 = 1$$

$$\Leftrightarrow c_1 = 1/7$$

$$\text{en } c_2 = 0,7 - 4/7 = 9/70$$

$$\text{dus: } \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{9}{70} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

dan:

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{9}{70} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= 1^t \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} + 0,3^t \frac{9}{70} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4/7 + (9/70)(0,3^t) \\ 3/7 - (9/70)(0,3^t) \end{bmatrix}$$

$$4. \lim_{t \rightarrow +\infty} \begin{bmatrix} 4/7 + (9/70)(0,3)^t \\ 3/7 - (9/70)(0,3)^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/7 \\ 3/7 \end{bmatrix}$$

$\log_3 14 = 0$

Defining 8.9

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S \\ VS \\ L \end{bmatrix}$$

1. a) Beginsituatie:

$$P_0 = \begin{bmatrix} 50\% & 25\% & 25\% \\ 0,50 & 0,25 & 0,25 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \quad 3 \times 1$$

② Migratiematrix

$$M = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,8 \end{bmatrix} \quad 3 \times 3$$

o zoveel % is afkomstig van ...

+ 1 1 1 oaltijd bij Markov-model

③ Bepaal eigenwaarden en eigenvectoren van M

karakteristieke vergelijking:

$$\begin{bmatrix} 0,7-\lambda & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,8-\lambda & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,8-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(B_v) = \begin{vmatrix} 0,7-\lambda & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,8-\lambda & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,8-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} R_1 &= R_1 + R_2 + R_3 \\ \Leftrightarrow \end{aligned} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0,1 & 0,8-\lambda & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,8-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0,1 & 0,8-\lambda & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,8-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} K_1 &= K_1 - K_1 \\ K_3 &= K_3 - K_1 \\ \Leftrightarrow \end{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,7-\lambda & 0 \\ 0,2 & -0,1 & 0,6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda) \begin{vmatrix} 0,7-\lambda & 0 \\ 0,1 & 0,6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(0,7-\lambda)(0,6-\lambda) = 0$$

→ eigenwaarden: $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = 0,7$ en $\lambda_3 = 0,6$
 ↳ altijd een waarde $\lambda = 1$

eigenvectoren:

$$\lambda_1 = 1 \quad \begin{bmatrix} -0,3 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & -0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & -0,2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -0,3x + 0,1y + 0,1z = 0 & (1) \\ 0,1x - 0,2y + 0,1z = 0 & (2) \\ 0,2x + 0,1y - 0,2z = 0 & (3) \end{cases}$$

stel $x = \pi$

$$(1) y = -x + 3\pi$$

$$(2) \pi + 2x - 6\pi + x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{3}$$

$$\text{dan is } y = \frac{-5\pi}{3} + \frac{9}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$$

→ eigenvector: $\pi \begin{bmatrix} 1 \\ 4/3 \\ 5/3 \end{bmatrix} = \pi \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (\pi \in \mathbb{R}_0)$

$$\lambda_2 = 0,7 \quad \begin{bmatrix} 0 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,1y + 0,1z = 0 & (1) \\ 0,1y + 0,1y + 0,1z = 0 & (2) \\ 0,2x + 0,1y + 0,1z = 0 & (3) \end{cases}$$

set $y = s$

$$(1) z = -s$$

$$(2) x = s - s = 0$$

$$\rightarrow \text{eigenvector: } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}_0)$$

$$\lambda_3 = 0,6 \quad \begin{bmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,1x + 0,1y + 0,1z = 0 & (1) \\ 0,1x + 0,2y + 0,1z = 0 & (2) \\ 0,2x + 0,1y + 0,2z = 0 & (3) \end{cases}$$

set $x = t$

$$(1) y = -x - z$$

$$(2) t - 2z - 2t + x = 0$$

$$\Leftrightarrow -t - z = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -t$$

$$\text{on } y = t - t = 0$$

→ eigenvector: $t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}_0)$

Samengesteld:

$\lambda_1 = 1: \pi \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ en $\lambda_2 = 0,715: 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ en $\lambda_3 = 0,6: t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (\pi, s, t \in \mathbb{R}_0)$

④ Verdeling over 5 jaar

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,25 \\ 0,25 \end{bmatrix}$$

$M \qquad M_0$

$$= \begin{bmatrix} 0,35 + 0,025 + 0,025 \\ 0,05 + 0,2 + 0,025 \\ 0,10 + 0,025 + 0,2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,40 \\ 0,275 \\ 0,325 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40\% \\ 27,5\% \\ 32,5\% \end{bmatrix}$$

2. ⑤ Verdeling op lange termijn

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,25 \\ 0,25 \end{bmatrix}$$

⑥ Beginsituatie schrijven als lineaire combinatie van de eigenred.

$$\begin{bmatrix} 0,50 \\ 0,25 \\ 0,25 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3C_1 + C_3 = 0,50 & (1) \rightarrow C_3 = 0,50 - 3C_1 \\ 4C_1 + C_2 = 0,25 & (2) \\ 5C_1 - C_2 - C_3 = 0,25 & (3) \end{cases}$$

(1) in (2) en (3)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4C_1 + C_2 = 0,25 & (4) \\ 8C_1 - C_2 = 0,75 & (5) \rightarrow C_2 = 8C_1 - 0,75 \end{cases}$$

(5) in (4)

$$\Leftrightarrow 4C_1 + 8C_1 - 0,75 = 0,25$$

$$\Leftrightarrow C_1 = 1/12$$

$$\text{en } C_2 = \frac{8}{12} - \frac{3}{12} = \frac{-1}{12}$$

$$\text{en } C_3 = \frac{6}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

dus:

$$\begin{bmatrix} 0,50 \\ 0,25 \\ 0,25 \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} - \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

⑦ Migratievergelijking

$$\begin{matrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \overset{\lambda_1=1}{\frac{1}{12}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \overset{\lambda_2=0,7}{\frac{1}{12}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \overset{\lambda_3=0,6}{\frac{1}{4}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= 1^t \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} - 0,7^t \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} - 0,6^t \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

⑧ Verdeling op lange termijn

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} 1^t & 3 & 0 & 1 \\ \frac{1}{12} & 4 & -\frac{0,7^t}{12} & 0 \\ & 5 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/12 \\ 4/12 \\ 5/12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25\% \\ 33,33\% \\ 66,66\% \end{bmatrix}$$

Oefening 8.10

nu	volg. periode	
	mono	auto
mono	0,75	0,25
auto	0,35	0,65

Migratiematrix

$$M = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,35 \\ 0,25 & 0,65 \end{bmatrix}$$

eigenwaarden en eigenvectoren van M

karakteristieke vergelijking:

$$\begin{bmatrix} 0,75-\lambda & 0,35 \\ 0,25 & 0,65-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow \det(P_v) = \begin{vmatrix} 0,75-\lambda & 0,35 \\ 0,25 & 0,65-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$R_1 = R_1 + R_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0,25 & 0,65-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0,25 & 0,65-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(0,65-\lambda-0,25) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(0,40-\lambda) = 0$$

$\rightarrow$ eigenwaarden: $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = 0,40$

eigenvectoren:

$$\lambda_1 = 1 \quad \begin{bmatrix} -0,25 & 0,35 \\ 0,25 & 0,35 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -0,25x + 0,35y = 0 \\ 0,25x - 0,35y = 0 \end{cases}$$

stel $x = \pi$

$$y = \frac{25}{35} \pi = \frac{5}{7} \pi$$

→ eigenvector: $x \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (x \in \mathbb{R}_0)$

$\lambda_2 = 0,40 \quad \begin{bmatrix} 0,35 & 0,35 \\ 0,25 & 0,25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,35x + 0,35y = 0 \\ 0,25x + 0,25y = 0 \end{cases}$

stel $x = s$

$y = -s$

→ eigenvector: $s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}_0)$

Op lange termijn:

$A^R = P \cdot \lambda^R \cdot P^{-1}$

met A = migratiematrix

P = vectormatrix

λ = eigenwaardematrix

$P = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}; \quad P^{-1} = \frac{-1}{12} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}; \quad \lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{bmatrix}$

duur: $A^\infty = \frac{-1}{12} \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{bmatrix}^\infty \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$

$= \frac{-1}{12} \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$

$$= \frac{-1}{12} \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{-1}{12} \begin{bmatrix} -7 & -7 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7/12 & 7/12 \\ 5/12 & 5/12 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \frac{7}{12} = 0,5833$$

Dus 58,33% zal een motorvlamewagen bezitten.

Oefening 8.11

nu	volg. periode		
	A	B	C
A	0,8	0,1	0,1
B	0,2	0,7	0,1
C	0,2	0,1	0,7

$$\text{Overgangsmatrix: } P = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,7 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,7 \end{bmatrix}$$

$$1. \text{ begin situatie: } P_0 = \begin{bmatrix} 200 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

situatie bij volgend bezoek (na 1 periode):

$$P \cdot P_0 = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,7 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 200 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 160 + 40 + 20 \\ 20 + 140 + 10 \\ 20 + 20 + 70 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 220 \\ 170 \\ 110 \end{bmatrix}$$

Dus 220 klanten zullen naar filiaal A gaan, 170 klanten naar filiaal B en 110 klanten naar filiaal C.

$$2. \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,7 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 200 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

① eigenwaarden en eigenvectoren van P

karacteristieke vergelijking:

$$\begin{bmatrix} 0,8-\lambda & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,7-\lambda & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,7-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(ku) = \begin{vmatrix} 0,8-\lambda & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,7-\lambda & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,7-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$R_1 = R_1 + R_2 + R_3 \quad \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0,1 & 0,7-\lambda & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,7-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0,1 & 0,7-\lambda & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,7-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{matrix} K_2 = K_2 - K_1 \\ K_3 = K_3 - K_1 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,6-\lambda & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(0,6-\lambda)(0,6-\lambda) = 0$$

$\rightarrow$ eigenwaarden: $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = 0,6$

eigenvectoren:

$$\lambda_1 = 1 \quad \begin{bmatrix} -0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & -0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & -0,3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -0,2x + 0,2y + 0,2z = 0 & (1) \rightarrow y = x - z \\ 0,1x - 0,3y + 0,1z = 0 & (2) \rightarrow z = 3y - x \\ 0,1x + 0,1y - 0,3z = 0 & (3) \end{cases}$$

stel $x = \pi$

$$(1) \quad y = \pi - z$$

$$(2) \pi - 3\pi + 3z + z = 0$$

$$\Leftrightarrow 4z = 2\pi$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{2}\pi$$

$$\text{en } y = \frac{1}{2}\pi$$

$$\rightarrow \text{eigenvector: } \pi \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\pi \in \mathbb{R}_0)$$

$$\lambda_2 = 0,6 \quad \begin{bmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,2x + 0,2y + 0,2z = 0 & (1) \rightarrow z = -x - y \\ 0,1x + 0,1y + 0,1z = 0 & (2) \\ 0,1x + 0,1y + 0,1z = 0 & (3) \end{cases}$$

stel $x = s$ en $y = t$

$$z = -s - t$$

$$\rightarrow \text{eigenvector: } s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (s, t \in \mathbb{R}_0)$$

Samengevat:

$$\lambda_1 = 1: \pi \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{en } \lambda_2 = 0,6: s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (\pi, s, t \in \mathbb{R}_0)$$

② beginsituatie schrijven als lineaire combinatie van de eigenvectoren

$$\begin{bmatrix} 200 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2C_1 + C_2 = 200 & (1) \rightarrow C_2 = 200 - 2C_1 \\ C_1 + C_3 = 200 & (2) \rightarrow C_1 = 200 - C_3 \\ C_1 - C_2 - C_3 = 100 & (3) \end{cases}$$

(1) en (2) in (3)

$$200 - C_3 - 200 + 400 - 2C_3 - C_3 = 100$$

$$\Leftrightarrow -4C_3 = -300$$

$$\Leftrightarrow C_3 = 75$$

$$\text{en } C_1 = 125$$

$$\text{en } C_2 = -50$$

dus:

$$\begin{bmatrix} 200 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix} = 125 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 50 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 75 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

③ Overgangsvergelijking

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,7 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,7 \end{bmatrix} \left(125 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 50 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 75 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= 1^t \cdot 125 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 50 \cdot (0,6)^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 75 \cdot (0,6)^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

④ Verdeling op lange termijn

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} 125 \cdot 1^t & \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 50 \cdot \underbrace{(0,6)^t}_{=0} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 75 \cdot \underbrace{(0,6)^t}_{=0} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= 125 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 250 \\ 125 \\ 125 \end{bmatrix}$$

Dus op lange duur zullen 250 klanten filiaal A bezoeken, 125 klanten filiaal B en 125 klanten filiaal C.