

Examen: Wiskunde voor bedrijfskundigen I-B

Bachelor of Science in de handelwetenschappen

Academiejaar: 2016/2017

Zittijd: 2

☞ Totaal: 50 punten.

☞ Duur van het examen: 3u.

☞ Het gebruik van een zakrekenmachine is NIET toegelaten. Laat getallen die je zonder rekenmachine niet kan berekenen gewoon staan (zoals bijvoorbeeld e^{-2} , $\log_2 \pi$, $\sqrt{3}$, etc.).1. 6 ptn Juist of fout? (Vul in met "J" of "F" OP JE ANTWOORDBUNDEL.

- (a) Als f continu is op $[a, b]$ en afleidbaar op $]a, b[$, dan bestaat er een $c \in]a, b[$ zodat $f'(c) = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$.
- (b) Een functie die continu is in a is ook afleidbaar in a .
- (c) $f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$
- (d) Als de grafiek van f een verticale raaklijn bezit in het punt $(a, f(a))$, dan is f niet afleidbaar in a .
- (e) Als f'' van teken wisselt in a , dan heeft f een buigpunt in a .
- (f) Als f afleidbaar is in x_0 , dan $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)$ voor waarden van Δx voldoende dicht bij 0.

2. 4 ptn Geef de definitie van de logaritmische afgeleide van een functie $y = f(x)$. Bewijs dat de logaritmische afgeleide van f gelijk is aan (maak een keuze):

(a) $\frac{1}{f(x)}$

(b) $\frac{f'(x)}{f(x)}x$

(c) $\frac{f'(x)}{f(x)}$

(d) $\frac{1}{|f(x)|}$

(MEER VRAGEN OP OMMEZIJDE)

3. Voor een bepaald product bestaan volgende verbanden tussen de gevraagde hoeveelheid (q) en prijs (p) van het door haar geproduceerde goed:

$$q = V(p) = \frac{64}{p e^{\frac{p}{4}}} \quad \text{en} \quad V'(p) = -\frac{16(p+4)}{p^2 e^{\frac{p}{4}}}$$

- (a) 4 ptn Met hoeveel dient de prijs $p = 8$ ongeveer te veranderen als de resulterende vraag met e^{-2} eenheden dient toe te nemen?
- (b) 3 ptn *Maak gebruik van de rekenregels* om de prijselasticiteitsfunctie van de vraag te bepalen.
- (c) 3 ptn De firma overweegt een verhoging van haar huidige prijs $p = 8$. Wat is het effect van deze prijsverandering op de opbrengst? Argumenteer aan de hand van de verbandformule tussen opbrengst en de prijselasticiteit van de vraag.

4. Gegeven is de functie

$$f(x) = x^2 \log_2 x$$

- (a) 2 ptn Bepaal de nulpunten van deze functie.
- (b) 5 ptn Onderzoek of de Y -as een verticale asymptoot is van deze functie? Zo ja, aan welke kant (rechts, links of beide)?
- (c) 3 ptn Hoe verloopt de functie in het punt $x = 2$: is ze daar stijgend/dalend of bereikt ze daar een lokaal extremum (maximum of minimum)?

5. 8 ptn Bepaal alle buigpunten van de functie

$$f(x) = x^5 + e^4 - 10x^3 + 20x^2 + 115x$$

6. (a) 6 ptn $\int \frac{2x+3}{\sqrt{2x+1}} dx$
- (b) 6 ptn $\int \cos \frac{x}{3} \cdot \ln \left(\sin \frac{x}{3} \right) dx$

FAMILIENAAM:

VOORNAAM:

VRAAG 1.

Antwoord:

Uitwerking:

(a) J

(b) F

(c) J

(d) J

(e) F

(f) F

VRAAG 2.

Antwoord:

Uitwerking:

$$(\ln |f(x)|)' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \rightarrow \text{antw. (c)}$$

Bewijs: zie theorie

$$* f(x) > 0$$

$$(\ln |f(x)|)' = (\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$* f(x) < 0$$

$$(\ln |f(x)|)' = (\ln (-f(x)))' = \frac{1}{-f(x)} \cdot (-f'(x))$$

$$= \frac{f'(x)}{f(x)}$$

VRAAG 3.

Antwoord:

Uitwerking:

$$q = V(p) = \frac{64}{p e^{1/4}}$$

$$V'(p) = -\frac{16(p+4)}{p^2 e^{1/4}}$$

$$(a) \underbrace{\Delta q(8)}_{\frac{1}{e^{-2}}} \approx q'(8) \cdot \Delta p \quad ?$$

$$q'(8) = V'(8) = -\frac{16(8+4)}{8^2 \cdot e^{1/4}} = -\frac{16 \cdot 12}{64 \cdot e^2} = -\frac{3}{e^2} = -3e^{-2}$$

$$\text{Dus: } e^{-2} \approx -3 \cdot e^{-2} \cdot \Delta p \Leftrightarrow \Delta p \approx -\frac{1}{3}$$

Antw: De prijs dient ongeveer met $\frac{1}{3} \text{€}$ te dalen.

$$(b) \quad \begin{aligned} \varepsilon_q(p) &= \varepsilon_{64}(p) - \varepsilon_{p e^{1/4}}(p) = 0 - (\varepsilon_p + \varepsilon_{p^{1/4}}) \\ &= -1 - \frac{p}{4} \end{aligned}$$

$$(c) \quad O'(p) = q \cdot (1 + \varepsilon_v(p))$$

$$O'(8) = \underbrace{V(8)}_{>0} \cdot \underbrace{(1 + \varepsilon_v(8))}_{\text{bepaalt teken}}$$

$$= >0 \cdot \underbrace{(1 + (-3))}_{<0} \quad \varepsilon_v(8) = -1 - \frac{8}{4} = -1 - 2 = -3$$

$O'(8) < 0 \Rightarrow$ De opbrengsten zullen afnemen.

VRAAG 4.

Antwoord:

Uitwerking: $f(x) = x^2 \cdot \log_2 x$

$$(a) \quad x^2 \cdot \log_2 x = 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ of } \log_2 x = 0$$

$\swarrow$ $\nearrow$
 $\notin \text{dom } f$ $x=1$

(b) (4-as: $x=0$) $\rightarrow$ enkel RL heeft zin !!
 (vw: $x > 0$)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \log_2 x &= 0 \cdot (-\infty) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2 x}{x^{-2}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) \stackrel{\text{H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x \cdot \ln 2}}{-2x^{-3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \cdot \ln 2} \cdot \frac{x^3}{-2} = \frac{0^2}{-2 \ln 2} = 0 \end{aligned}$$

Antw.: neen, want $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \notin \{-\infty, +\infty\}$

(c) $f'(2)$?

$$f'(x) = 2x \cdot \log_2 x + x^2 \cdot \frac{1}{x \ln 2} = x \left(2 \log_2 x + \frac{1}{\ln 2} \right)$$

$$f'(2) = 2 \cdot \left(2 \cdot \log_2 2 + \frac{1}{\ln 2} \right) = 2 \cdot \left(2 \cdot 1 + \frac{1}{\ln 2} \right) > 0$$

$\Rightarrow$ De functie is daar stijgend.

VRAAG 5.

Antwoord:

Uitwerking:

$$f(x) = x^5 + e^4 - 10x^3 + 20x^2 + 115x$$

$$f'(x) = 5x^4 - 30x^2 + 40x + 115$$

$$f''(x) = 20x^3 - 60x + 40$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 20(x^3 - 3x^2 + 2) = 0$$

$x = 1$ mulp. $\rightarrow$ zie Horner.

	1	0	-3	2
1	1	1	-2	0

$$f''(x) = (x-1)(x^2 + x - 2) \rightarrow \text{mulp. } x=1 \vee x=-2.$$

$$= 20(x-1)^2(x+2)$$

x	-2	1
$20(x-1)^2$	+	+
$x+2$	-	+
$f''(x)$	-	+

geen Bgpt

$$f'(-2) \in \mathbb{R} ??$$

$$\begin{aligned}
 f'(-2) &= 5 \cdot (-2)^4 - 30 \cdot (-2)^2 + 40(-2) + 115 \\
 &= 5 \cdot 16 - 30 \cdot 4 - 80 + 115 = 80 - 120 - 80 + 115 \\
 &= -5 \in \mathbb{R} \Rightarrow -2 \text{ is Bgpt van } f(x)
 \end{aligned}$$

VRAAG 6.

Antwoord: (a) $\frac{1}{3} \sqrt{(2x+1)^3} + 2 \sqrt{2x+1} + C$

(b) $3 \sin \frac{x}{3} \cdot \left(\ln \left(\sin \frac{x}{3} \right) - 1 \right) + C$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \int \frac{2x+3}{\sqrt{2x+1}} dx & u=2x+1 & \Rightarrow 2x+3 = u+2 \\
 & & du=2dx & \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du \\
 & = \frac{1}{2} \int \frac{u+2}{\sqrt{u}} du \\
 & = \frac{1}{2} \int \frac{u}{\sqrt{u}} du + \frac{2}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} \\
 & = \frac{1}{2} \int u^{1/2} du + \int u^{-1/2} du = \frac{1}{2} \frac{u^{3/2}}{3/2} + \frac{u^{1/2}}{1/2} + C \\
 & = \frac{1}{3} \sqrt{u^3} + 2 \sqrt{u} + C = \frac{1}{3} \sqrt{(2x+1)^3} + 2 \sqrt{2x+1} + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad & \int \cos \frac{x}{3} \cdot \ln \left(\sin \frac{x}{3} \right) dx & u = \sin \frac{x}{3} \\
 & & du = \cos \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{3} dx \\
 & & 3 du = \cos \frac{x}{3} dx \\
 & = 3 \cdot \int \underbrace{1}_{g'} \cdot \underbrace{\ln u}_f du \\
 & & g'(u) = 1 \Rightarrow g(u) = u \\
 & & f(u) = \ln u \Rightarrow f'(u) = \frac{1}{u} \\
 & = 3 \left[u \cdot \ln u - \int u \cdot \frac{1}{u} du \right] \\
 & = 3 \left[u \cdot \ln u - u \right] + C \\
 & = 3u (\ln u - 1) + C \\
 & = 3 \sin \frac{x}{3} \left(\ln \left(\sin \frac{x}{3} \right) - 1 \right) + C
 \end{aligned}$$