

wiskunde: bewijzen

grondstof formule verandering log.

$$\lg_a b \cdot \log_b x = \log_a x$$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

$$a^{\log_a b \cdot \log_b x} = (a^{\log_a b})^{\log_b x}$$

$$= (b)^{\log_b x}$$

$$= x$$

$$\begin{array}{l} \text{want } a^{\log_a b} = b \\ \text{want } b^{\log_b x} = x \end{array}$$

te bewijzen was: omdat per def. $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$, is te bewijzen dat $a^{\log_a b \cdot \log_b x} = x$

bewijs $a \propto b$ bij asymptoten

$$\text{bewijs: } a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

we beschouwen het geval $x \rightarrow \infty$, met $y = ax + b$ een schuine asym. van f op $+\infty$; er is een verschilfunctie v zodat $f(x) = ax + b + v(x)$ en $\lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = 0$, hieruit volgt:

$$a = \frac{f(x) - b - v(x)}{x} = \frac{f(x)}{x} - \frac{b}{x} - \frac{v(x)}{x} \quad \text{als } x \neq 0$$

$$\text{en } a = \lim_{x \rightarrow +\infty} a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{b}{x} - \frac{v(x)}{x} \right)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{v(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \end{aligned}$$

(we zetten hier b voorop en $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = 0$)

bewijs: $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$

verder geldt: $b = f(x) - ax - v(x)$, zodat

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax - v(x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) - \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) \end{aligned}$$

omgekeerd geldt voor reële getallen a en b , die berekend werden als limieten (L1) en (L2), dat $y = ax + b$ en SA is van f op $+\infty$ omdat.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} ((f(x) - ax) - b) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) - \lim_{x \rightarrow +\infty} b \\ &= b - b = 0 \end{aligned}$$

het bewijs voor $x \rightarrow -\infty$ is volledig analoog.

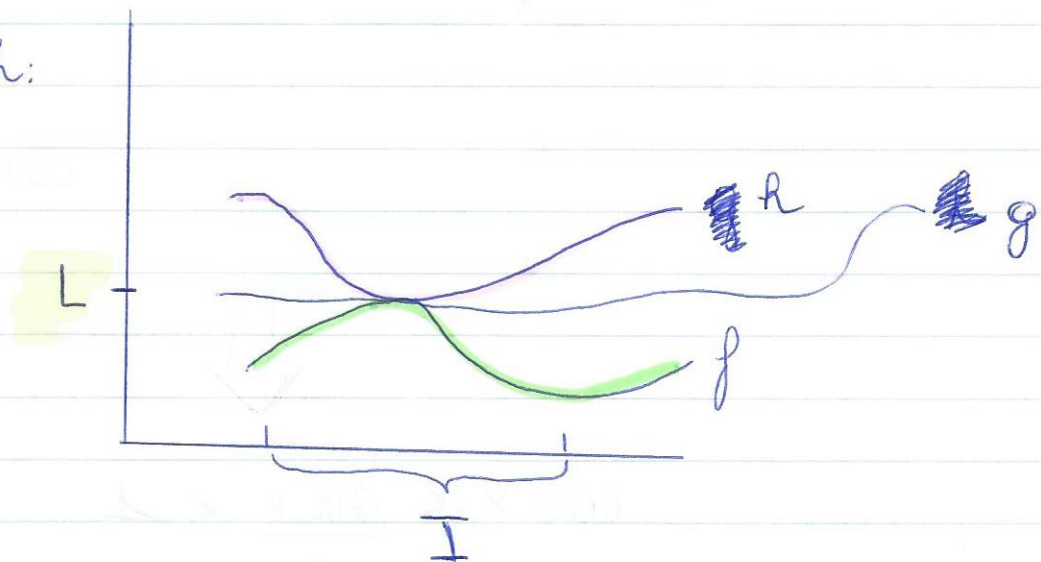
beetje knijpstelling

zij $a \in \mathbb{R}$ en I een open interval dat a bevat.
indien $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ voor alle $x \in I \setminus \{a\}$
en als de limieten $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ en $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$

bestaan en ~~elkaar~~ gelijk zijn, dan bestaat
ook $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ en

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$$

grafisch:



toepassing: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = ?$$

step 1: invullen $\frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0} \rightarrow$ onbepaald

step 2: $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \rightarrow$ bewijs volgt straks

$$\text{step 3: } \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} 1$$

$$\begin{array}{c} // \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} // \\ 1 \end{array}$$

dus $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

$\sin x < x < \tan x$

(zie goniometrische
winkel)

$\sin x$



$\frac{\sin x}{x} < \frac{x}{x} = 1$

delen
door x

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

• $\cos x$



$x \cdot \cos x < \sin x$



$\cos x < \frac{\sin x}{x}$

delen
door x



$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \cos x < \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} < \lim_{x \rightarrow 0} 1$

$1 < \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} < 1$

dus: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$