



UNIVERSITEIT GENT

VAKGROEP SYSTEMS

SYSTEEMDYNAMICA

Prof. Dr. Ir. M. Loccufier

Academiejaar 2012–2013

Inhoudsopgave

1	Inleiding	1
1.1	Wat is systeemdynamica?	1
1.2	Modellering	3
1.3	Differentiaalvergelijkingen	5
1.4	Lineariseren van de modelvergelijking	6
1.5	Overzicht	8
2	Eerste-orde dynamica's	10
2.1	Eerste-orde dynamica	10
2.1.1	Vrije responsie	12
2.1.2	Gedwongen responsie	12
2.1.3	Totale responsie	15
2.2	Integratormodel	16
2.3	Toepassingen	17
2.3.1	Hydraulische systemen	17
2.3.2	Elektrische systemen	20
2.3.3	Het evenwicht tussen vraag en aanbod	28
2.4	Oefeningen	36
2.4.1	Opslagtank	36
2.4.2	Watertoren	36
2.4.3	Dimensionering van een vat	37

2.4.4	Opladen van een condensator	37
2.4.5	Radioactiviteit	39
2.4.6	Cuspical Containers	40
2.4.7	Appels	41
2.4.8	Accumulatorvat	41
2.5	Oplossingen	43
2.5.1	Opslagtank	43
2.5.2	Watertoren	44
2.5.3	Dimensionering van een vat	45
2.5.4	Opladen van een condensator	47
2.5.5	Radioactiviteit	48
2.5.6	Cuspical Containers	49
2.5.7	Appels	52
2.5.8	Accumulatorvat	53
3	Tweede-ordedynamica	56
3.1	Stapantwoord	56
3.2	Sinusregime	68
3.3	Toepassingen: mechanische systemen	72
3.3.1	Inleiding	72
3.3.2	De veer	73
3.3.3	De demper	74
3.3.4	De massa	74
3.3.5	De tweede wet van Newton	75
3.4	Oefeningen	78
3.4.1	Massa-veersystemen: modellering	78
3.4.2	Lineariseren	79
3.4.3	Stapantwoord	80
3.4.4	Lift	80

3.4.5	Schokdemper voor een motorfiets	81
3.4.6	Frequentieresponsie van een standaard tweede-orde systeem	82
3.4.7	Auto over een vervormd wegdek	82
3.4.8	rugproblemen	83
3.5	Oplossingen	87
3.5.1	Massa-veersysteem: modellering	87
3.5.2	Lineariseren	88
3.5.3	Stapantwoord	88
3.5.4	Lift	90
3.5.5	Schokdemper voor een motorfiets	91
3.5.6	Frequentieresponsie van een standaard tweede-orde systeem	92
3.5.7	Auto over een vervormd wegdek	94
3.5.8	Rugproblemen	95
4	Stabiliteit	96
4.1	Hogere-orde systemen	96
4.2	Stabiliteit	97
5	Terugkoppeling	103
5.1	Inleiding	103
5.2	Basisbegrippen	104
5.3	Transfertoefunctie van de geslotenkring	106
5.4	PID-regelalgoritme	108
5.4.1	P-actie	108
5.4.2	I-actie	108
5.4.3	D-actie	110
5.4.4	PID-regelaar	111
5.5	Eigenschappen van terugkoppeling	112
5.5.1	Volgedrag en regelgedrag	112

5.5.2	Transiënt gedrag	116
5.6	Toepassingen	118
5.6.1	Peilregeling in een vat	118
5.6.2	Stabilisering van het nationaal inkomen	121
5.7	Oefeningen	127
5.7.1	P-regeling van een vat	127
5.7.2	Ontwerp van een regelaar	129
5.7.3	Foutberekening	129
5.7.4	Responsie van een geslotenkring	129
5.8	Oplossingen	131
6	Uitleg bij de papers	132
6.1	Bullwhip-effect	132
6.2	Competitie tussen websites	136
A	Laplace transformatie	145
A.1	Definitie van de Laplace transformatie	145
A.2	Eigenschappen van de Laplace transformatie	147
A.2.1	Lineaire superpositie	147
A.2.2	Afleiding	147
A.2.3	Tijdsvertraging	149
A.2.4	Transformatie van een periodieke functie	150
A.2.5	Stelling van de begin- en eindwaarde	150
A.2.6	Verandering van tijdschaal	151
A.2.7	Integratie in de tijd	152
A.2.8	Translatie in het complexe vlak	152
A.2.9	Afleiding en integratie in het complexe domein	152
A.2.10	Stelling van Duhamel	153
A.3	Laplace transformatie van belangrijke functies	154

A.3.1	Getransformeerde van een stapfunctie	154
A.3.2	Getransformeerd van een Dirac-impuls	155
B	Oplossen van differentiaalvergelijkingen	158
B.1	Algemene theorie	158
B.2	Toepassing	161
B.2.1	Eerste-ordesysteem	161
B.2.2	Tweede-ordesysteem	161

Hoofdstuk 1

Inleiding

1.1 Wat is systeemodynamica?

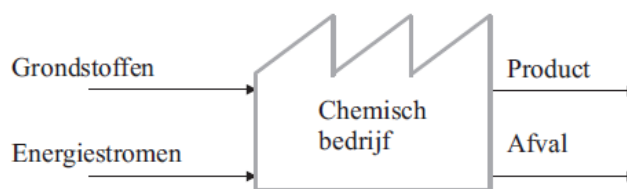
Alles rondom ons evolueert in de tijd, alles is in beweging. Hoe kunnen we dit vatten? Systeemodynamica is een universele wetenschap die een antwoord zoekt op deze zeer algemene vraag. Uiteraard focussen we ons gedurende dit opleidingsonderdeel op een aantal deelaspecten. Laten we starten met een aantal voorbeelden:

- Als we met de auto over een verkeersdrempel rijden aan hoge snelheid dan voelen we een schok. We wensen dat die schok vlug uitdempt. M.a.w. we wensen dat de op en neer gaande beweging van de auto in functie van de tijd niet lang duurt.
- Bij houtontginning voor industriële doeleinden wordt een evenwicht gezocht tussen de groeisnelheid van de bomen, de houtprijs op de markt en de uitbatingskosten van het bos zodat er winst wordt geboekt zonder het bos volledig te rooien.
- Een bedrijf wenst zo goed mogelijk te voldoen aan de vraag naar een product. Soms kunnen kleine fluctuaties in de vraag leiden tot grote fluctuaties in de productie. Het is wenselijk dit tijdig te kunnen bijsturen.

We merken meteen het universele karakter van systeemodynamica. We hebben een technisch voorbeeld, een voorbeeld uit de ecologie en een voorbeeld uit de economie. Telkens komen

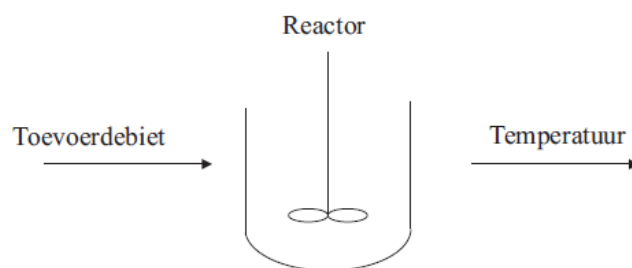
dezelfde aspecten naar boven: Hoe evolueert iets in de tijd, zal er een evenwicht bereikt worden, kunnen we voorspellen wat er zal gebeuren, kunnen we ingrijpen als de evolutie niet is zoals gewenst? Zeer algemeen probeert systeemdymanica de onderliggende structuur te begrijpen die de tijdsevolutie van een systeem bepaalt en daarenboven naar een strategie zoekt om een eventueel ongewenst gedrag te corrigeren.

Wat is nu een systeem? Het is een deel van de realiteit dat met de omgeving verbonden is door een aantal ingangen (triggers) en een aantal uitgangen (grootheden waarvan we de tijdsevolutie wensen te kennen). Het verloop van de ingangen bepaalt, samen met de aard van het systeem, het verloop van de uitgangen. Het begrip 'dynamica' houdt in dat de uitgangen op een bepaald tijdstip niet enkel afhangen van de ingangen op dit tijdstip maar ook van de ingangen op vroegere tijdstippen. We spreken van geheugenwerking. Voor een manager kan een volledig chemisch bedrijf het systeem van interesse zijn met de energiestromen en de grondstoffen als ingangen en de productie en het bijkomende afval als uitgangen (Figuur 1.1). Voor een controle-ingénieur van hetzelfde bedrijf is bijvoorbeeld



Figuur 1.1: Chemisch bedrijf als systeem.

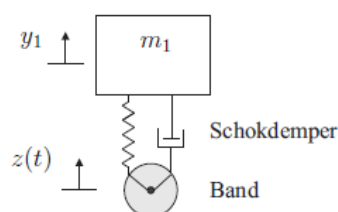
één enkele chemische reactor het systeem van interesse met het debiet van het koelwater als ingang en de temperatuur van het gevormde product als uitgang (Figuur 1.2). Een systeem wordt afgebakend door een grens die afhangt van wat we willen bestuderen. De ingangen en de uitgangen overschrijden die grens. Het systeem transformeert de ingang tot de uitgang. Om een systeem te analyseren hebben we een dynamisch model nodig dat het verband tussen de ingang en de uitgang vastlegt.



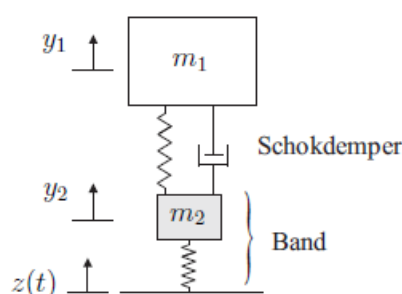
Figuur 1.2: Chemische reactor als systeem.

1.2 Modelling

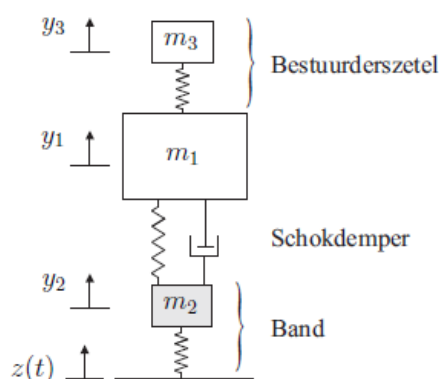
Het gedrag van een systeem kan nooit met een oneindige nauwkeurigheid door een stelsel mathematische vergelijkingen worden weergegeven. Het proces waarbij een fysisch systeem vereenvoudigd wordt tot een mathematisch handelbare vorm noemen we modelleren. Een goed model met enerzijds voldoende eenvoudig zijn om er wiskundig goed mee te kunnen werken en moet anderzijds voldoende gedetailleerd zijn om het gestelde probleem met de gewenste nauwkeurigheid te kunnen oplossen. Voor het onderzoek van éénzelfde systeem kan met verschillende dynamische modellen aanwenden al naargelang het probleem dat men wil oplossen en de vereiste precisie. We beschouwen als voorbeeld een auto waarvoor een ophanging moet ontworpen worden. Een auto is een complex technisch systeem bestaande uit koetswerk, motor, overbrenging, ophanging, stuurmechanisme, ... We bekijken de verticale verplaatsing van de banden ten gevolge van oneffenheden in het wegdek, het wegdek is de ingang, de daaruitvolgende verticale verplaatsing van de bestuurderszetel is de uitgang van ons systeem. Om de omzetting van de een in de ander te bestuderen, stellen we een model op van de auto. De hoofdtak van de ophanging is een reductie van de hevige trillingen t.g.v. het ruwe wegdek. We nemen in een eerste fase de voorstelling van Figuur 1.3 als model. Enkel de ophanging wordt als samendrukbaar beschouwd en bestaat uit een veer en een demper. De band wordt oneindig stijf gemodelleerd en alle overige onderdelen worden samen als een massa m_1 gemodelleerd. De beweging $z(t)$ van de band wordt opgelegd door de weg. Die beweging wordt via een veer en de demper

**Figuur 1.3:** Model met 1 massa.

omgezet in een verticale beweging $y_1(t)$ van de massa m_1 . Het ontwerp komt neer op het aanpassen van de veer en de demper zodat $y_1(t)$ het gewenste verloop heeft. Als de samendrukbaarheid van de band in rekening wordt gebracht, dan komen we tot het model van Figuur 1.4. De band modelleren we als een veer in combinatie met een massa m_2 .

**Figuur 1.4:** Model met 2 massa's.

Deze voorstelling is nauwkeuriger maar heeft twee onbekende verplaatsingen, de verplaatsing y_1 van de massa m_1 en de verplaatsing y_2 van de band m_2 . We zouden de vervormbaarheid van de zetel met bevestiging kunnen in rekening brengen door het model van Figuur 1.5 te nemen. Dan hebben we al drie onbekende verplaatsingen y_1 , y_2 en y_3 , alle aangeduid op de figuur. Zo kunnen we doorgaan en zien we de nauwkeurigheid toenemen ten kost van de eenvoud. Het resultaat van een modelleringsproces is een stelsel mathematische vergelijkingen, modelvergelijkingen genoemd. Eens een model gevonden is, kan de analyse beginnen. Een analyse komt in hoofdzaak neer op een voorspelling van het gedrag en levert het antwoord op een aantal cruciale vragen:



Figuur 1.5: Model met 3 massa's.

1. Wat is de uitgang van het systeem voor een gegeven set van ingangen; m.a.w. wat is de responsie van het systeem?
2. Welke structurele parameters moeten gewijzigd worden om de responsie binnen de opgelegde specificaties te houden; d.i. hoe moet het ontwerp aangepast worden?
3. Indien het systeem een gegeven is waarvan de structurele parameters niet meer gewijzigd kunnen worden, hoe moeten we de ingang aanpassen zodat de responsie binnen de opgelegde specificaties valt; hoe moet het systeem gestuurd worden?

In dit opleidingsonderdeel werken we enkel met tijdscontinue systemen. De modelvergelijkingen zijn steeds in de vorm van differentiaalvergelijkingen. Het analytisch denken staat centraal.

1.3 Differentiaalvergelijkingen

Vele belangrijke problemen uit de ingenieurswereld, de fysica, de sociale wetenschappen en de economische wetenschappen worden geformuleerd, in wiskundige termen, als het zoeken van een functie die voldoet aan een vergelijking die de afgeleiden van de onbekende functie bevat. We noemen dit een differentiaalvergelijking. We beperken onze bespreking tot de gewone differentiaalvergelijkingen. Dit houdt in dat de onbekende functie slechts van één

veranderlijke afhangt. De orde van de differentiaalvergelijking is de orde van de hoogste afgeleide van de onbekende functie die in de vergelijking voorkomt. Zeer algemeen geldt dat:

$$F \left[t, y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \frac{d^2y(t)}{dt^2}, \dots, \frac{d^ny(t)}{dt^n}, u(t) \right] = 0 \quad (1.1)$$

een n-de-orde differentiaalvergelijking is die een verband geeft tussen de onafhankelijke veranderlijke t en de waarde van functie y en zijn afgeleiden. Soms zullen we de afleiding $\frac{d}{dt}$ vervangen door volgende notatie:

$$\frac{dy}{dt} \stackrel{\text{not}}{=} \dot{y}$$

We spreken van een lineaire differentiaalvergelijking als de functie F lineair is in de variabelen $y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \frac{d^2y(t)}{dt^2}, \dots, \frac{d^ny(t)}{dt^n}$. Een lineaire differentiaalvergelijking heeft de algemene vorm:

$$a_0(t) \frac{d^ny}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n(t)y = u(t) \quad (1.2)$$

Indien de coëfficiënten $a_0(t), a_1(t), \dots, a_n(t)$ constanten zijn dan spreken we van een lineair tijdsinvariant systeem (LTI-systeem):

$$a_0 \frac{d^ny}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y = u(t) \quad (1.3)$$

Lineair tijdsinvariante systemen zijn de meest eenvoudige systemen om mee te werken. We vragen ons af wanneer we een systeem als lineair mogen beschouwen.

1.4 Lineariseren van de modelvergelijking

Het gedrag van een systeem wordt sterk vereenvoudigd als het systeem lineair is. We spreken van een lineair systeem als er een evenredig verband bestaat tussen oorzaak en gevolg. Wiskundig wordt dit uitgedrukt met behulp van het superpositieprincipe. Dit principe kan als volgt verwoord worden. Onderstel dat $y_1(t)$ en $y_2(t)$ de uitgangsfuncties zijn van een systeem respectievelijk voortgebracht door de ingangsfuncties $u_1(t)$ en $u_2(t)$. Dan is de uitgangsfunctie voortgebracht door

$$\alpha u_1(t) + \beta u_2(t) \quad (1.4)$$

gegeven door

$$\alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \quad (1.5)$$

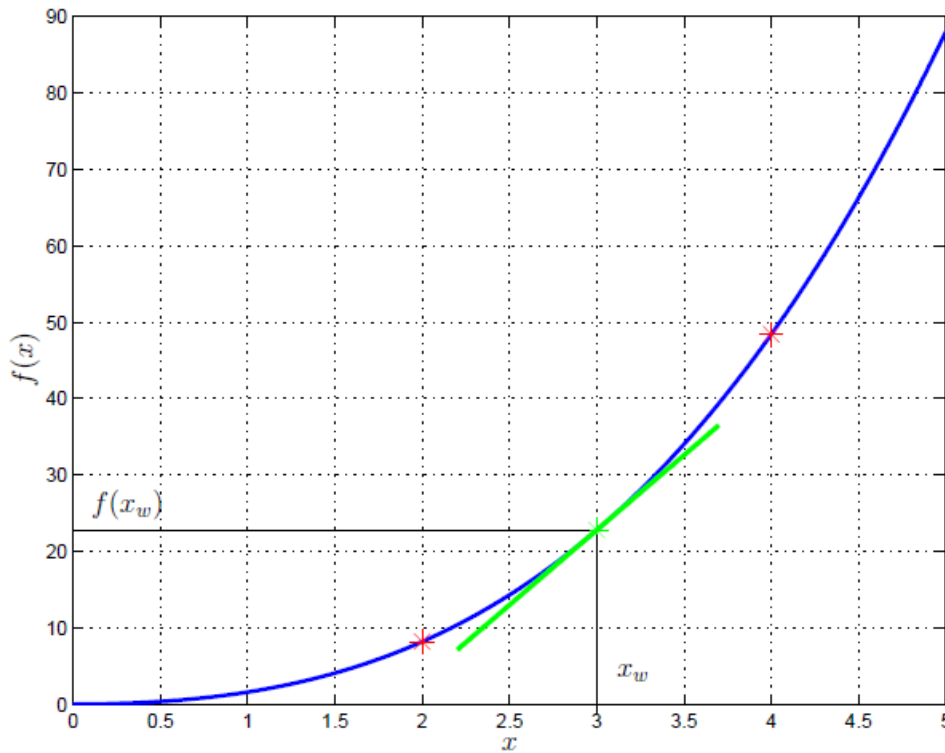
waarbij α en β willekeurige constanten zijn. Het superpositieprincipe vergemakkelijkt in hoge mate de analyse van lineaire systemen. Maar tegelijkertijd legt het beperkingen op aan hun toepassingsmogelijkheden. Niet-lineaire systemen zijn dynamische systemen die niet door lineaire vergelijkingen kunnen beschreven worden of anders uitgedrukt, waarop het superpositieprincipe niet toepasbaar is. Strikt beschouwd zijn haast alle fysische systemen niet-lineair. Dit is zo alleen al wegens het feit dat de variaties die fysische grootheden kunnen ondergaan altijd aan zekere begrenzings zijn onderworpen. Verzadiging treedt onvermijdelijk op bij voldoende grote krachtaandrijving. Belangrijker nog is het feit dat er talrijke natuurlijke en technische processen bestaan waarvan het werkingsprincipe zelf berust op een niet-lineaire aard. Toch is de theorie van de lineaire systemen belangrijk. Vaak kunnen niet-lineaire elementen gelineariseerd worden rondom een of ander werkingspunt. Een werkingspunt van een dynamisch systeem stemt overeen met een of andere vorm van evenwicht. Het lineariseren illustreren we grafisch met behulp van een niet-lineaire veer-karakteristiek. Beschouw een veer met een lengte l in rusttoestand. Indien de uiteinden t.o.v. elkaar met een hoeveelheid x worden ingedrukt of uitgerekt, genereert de veer een veerkracht $f(x)$ die de vervorming tegenwerkt. Het verband tussen x en $f(x)$ voor een stijve veer heeft mogelijks het verloop van Figuur 1.6. Zij x_w een werkingspunt van de veer en $f(x_w)$ de daarmee corresponderende veerkracht. We zien op Figuur 1.6 dat de veer-karakteristiek in een kleine opgeving van $(x_w, f(x_w))$ benaderend lineair is. Zij

$$k = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_w} \quad (1.6)$$

de helling van de veer-karakteristiek ter hoogte van x_w . Dan geldt voor een voldoende kleine afwijking $\Delta x = x - x_w$ van het werkingspunt dat

$$f = kx \quad (1.7)$$

Met andere woorden, we vervangen de veer-karakteristiek lokaal door de raaklijn in het werkingspunt. Het linearisatieproces gebeurt analytisch met behulp van een Taylorreeks-



Figuur 1.6: Niet-lineaire veer karakteristiek.

ontwikkeling. We beperken ons tot functies met één veranderlijke. Stel dat $y = f(x)$ een niet-lineaire functie is in een modelvergelijking met $[x_w, f(x_w)]$ een werkingpunt van het systeem. De Taylorreeksontwikkeling van $f(x)$ rond dit werkingpunt geeft ons:

$$y = f(x) = f(x_w) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_w} (x - x_w) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=x_w} (x - x_w)^2 + \dots \quad (1.8)$$

Indien de afwijking $(x - x_w)$ voldoende klein is, mogen we de hogere graadstermen, dit zijn de termen $(x - x_w)^r$ met $r > 1$, verwaarlozen en krijgen we een lineair verband tussen y en x .

1.5 Overzicht

Binnen dit opleidingsonderdeel leggen we het accent op lineaire tijdsinvariante systemen. Af en toe komen niet-lineaire systemen en hun bijhorende complexiteit aan bod. We

werken rond een aantal dynamische fenomenen die we in zeer uiteenlopende toepassingen terugvinden: exponentiële groei (verval), fluctuaties, tijdsvertragingen, terugkoppeling en competitie. Het exponentieel aangroeien of vervallen van een grootte komt voor in een eerste-ordedynamica. Een voorbeeld hiervan is het leeglopen van een bad. Maar ook de wet van vraag en aanbod geeft, in zijn meest eenvoudige vorm, aanleiding tot dezelfde dynamica. In hoofdstuk 2 analyseren we de eerste-orde dynamica. Fluctuaties kunnen slechts optreden bij dynamica's van een orde twee of hoger. Resonantie, waarbij een matige periodieke ingang aanleiding geeft tot een heftig systeemantwoord, is technisch een zeer belangrijk fenomeen. Dit wordt besproken in hoofdstuk 3. We analyseren dynamica's van hogere orde in hoofdstuk 4 en definiëren het begrip stabiliteit. In hoofdstuk 5 bekijken we het begrip terugkoppeling om een ontworpen systeem tijdens werking te kunnen bijsturen. Een terugkoppeling vergelijkt het gewenst en het werkelijk gedrag en gebruikt het verschil tussen beide om in te grijpen. Hoofdstuk 5 bevat het meest gebruikt industriële algoritme om dit te realiseren. Soms treden tijdsvertragingen op tussen het systeemantwoord en zijn ingang. Dit heeft een beduidend effect op de dynamica. Het bullwhip effect, waar een kleine wijziging in de vraag van de consument een grote fluctuatie bij de producent veroorzaakt is hiervan een voorbeeld. Dit komt aan bod via een paper die bij deze syllabus zal verdeeld worden. Tot slot komen we in aanraking met de niet-lineaire systeemdynamica. Dit gebeurt aan de hand van een paper over competitie modellen bij websites. Op deze manier zullen we de toename in moeilijkheidsgraad ervaren als we het superpositieprincipe verlaten. Hoofdstuk 6 verschaft extra uitleg i.v.m. de hiervoor aangehaalde papers.

Hoofdstuk 2

Eerste–ordedynamica’s

2.1 Eerste–ordedynamica

We spreken van een eerste–ordedynamica indien de hoogste afgeleide van de onbekende functie in de differentiaalvergelijking van de orde één is. We definiëren u als de ingang en y als de uitgang van het systeem. Het standaard eerste–ordemodel heeft als uitdrukking:

$$\tau \dot{y} + y = Ku \tag{2.1}$$

We definiëren τ als de tijdsconstante. τ wordt uitgedrukt in seconden. Immers de dimensie van elke term uit de differentiaalvergelijking moet dezelfde zijn. De factor waarmee de ingang in het rechterlid vermenigvuldigd is, definiëren we als de statische versterkingsfactor K . De differentiaalvergelijking (2.1) heeft een unieke oplossing $y(t)$ voor een gekend verloop van de ingang $u(t)$ en een gegeven beginvoorwaarde y_0 :

$$y_0 \triangleq y(0)$$

We nemen zonder verlies van algemeenheid aan dat $u(t) = 0$ voor $t < 0$. Het verloop van $y(t)$ voor $t \geq 0$ bij een gegeven ingang $u(t)$ en beginvoorwaarde y_0 noemen we de responsie van het systeem. We bestuderen de responsie m.b.v. de Laplace transformatie (zie Bijlage A). We transformeren de oorspronkelijke differentiaalvergelijking met als onafhankelijke

veranderlijke t naar een algebraïsche vergelijking met complexe veranderlijke s . Voor (2.1) wordt dit

$$\tau(sY(s) - y_0) + Y(s) = KU(s) \quad (2.2)$$

met

$$Y(s) \triangleq \mathcal{L}\{y(t)\}$$

$$U(s) \triangleq \mathcal{L}\{u(t)\}$$

(2.2) kunnen we herschikken als

$$(s\tau + 1)Y(s) = \tau y_0 + KU(s)$$

of

$$Y(s) = \underbrace{\frac{\tau y_0}{s\tau + 1}}_{\text{beginvoorwaarde}} + \underbrace{\frac{K}{s\tau + 1}U(s)}_{\text{ingang}} \quad (2.3)$$

We merken dat het rechterlid van (2.3) uiteenvalt in twee delen. We voeren de volgende definities in:

$$G_0(s) \triangleq \frac{\tau y_0}{s\tau + 1}$$

$$G(s) \triangleq \frac{K}{s\tau + 1}$$

De vergelijking (2.3) schrijven we als:

$$Y(s) = G_0(s) + G(s)U(s)$$

$G_0(s)$ is een rationale functie van s e, bevat de beginvoorwaarde y_0 . $G(s)$ is eveneens een rationale functie van s en wordt bij definitie de *overdrachtsfunctie* of *transfertsfunctie* van de ingang $u(t)$ naar de uitgang $y(t)$ genoemd. We keren terug naar het tijdsdomein m.b.v. de inverse Laplace transformatie en definiëren:

$$y_{in}(t) \triangleq \mathcal{L}^{-1}\{G_0(s)\}$$

$$y_f(t) \triangleq \mathcal{L}^{-1}\{G(s)U(s)\}$$

dan geldt

$$y(t) = y_{in}(t) + y_f(t) \quad (2.4)$$

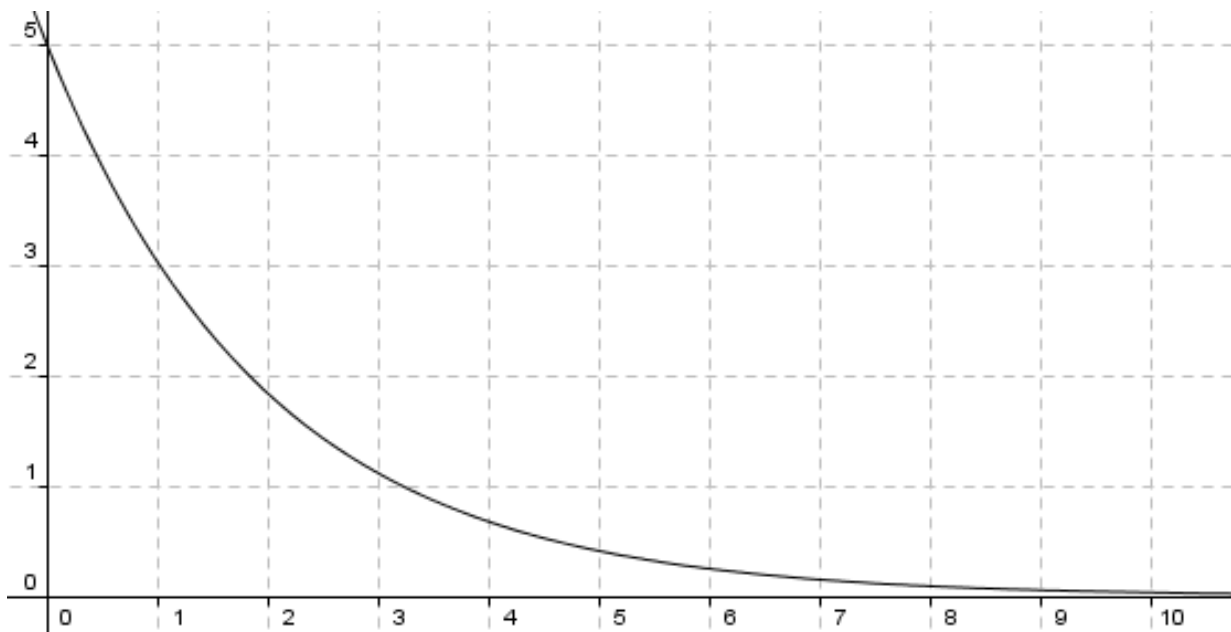
$y_{in}(t)$ noemen we de vrije responsie en drukt de afhankelijkheid van de beginvoorwaarden uit, $y_f(t)$ noemen we de gedwongen responsie en drukt de invloed van de ingang uit.

2.1.1 Vrije responsie

De vrije responsie kennen we onmiddellijk via tabel (A.1) uit Bijlage A:

$$y_{in}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\tau y_0}{s\tau + 1} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{y_0}{s + \frac{1}{\tau}} \right\} = y_0 \exp \left(\frac{-t}{\tau} \right)$$

Figuur 2.1 toont het verloop van de vrije responsie voor een eerste-ordesysteem met een



Figuur 2.1: Vrije responsie van een eerste-ordesysteem; $\tau = 2$, $y_0 = 5$

beginvoorwaarde $y_0 > 0$.

2.1.2 Gedwongen responsie

De gedwongen responsie kunnen we slechts expliciet berekenen als we de ingang $u(t)$ kennen. Een klassieke manier om het gedrag van een dynamisch systeem te bestuderen is de

analyse van de stapresponsie. Dit is de gedwongen responsie indien de ingang u wijzigt volgens een stap. We beschouwen de eenheidsstap:

$$u(t) = 0 \quad t < 0$$

$$u(t) = 1 \quad t \geq 0$$

Na Laplace transformatie geldt:

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

Met behulp van een splitsing in partieelbreuken en de inverse Laplace transformatie vinden we de stapresponsie:

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{1 + s\tau} \cdot \frac{1}{s} \right\}$$

Splitsen in partieelbreuken levert:

$$\begin{aligned} \frac{K}{1 + s\tau} \cdot \frac{1}{s} &= \frac{A}{1 + s\tau} + \frac{B}{s} \\ &= \frac{As + B(1 + s\tau)}{(1 + s\tau)s} \\ &= \frac{s(A + B\tau) + B}{(1 + s\tau)s} \end{aligned}$$

Nu lossen we een stelsel op om de coëfficiënten A en B te vinden:

$$\begin{cases} A + B\tau = 0 \\ B = K \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + K\tau = 0 \\ B = K \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -K\tau \\ B = K \end{cases}$$

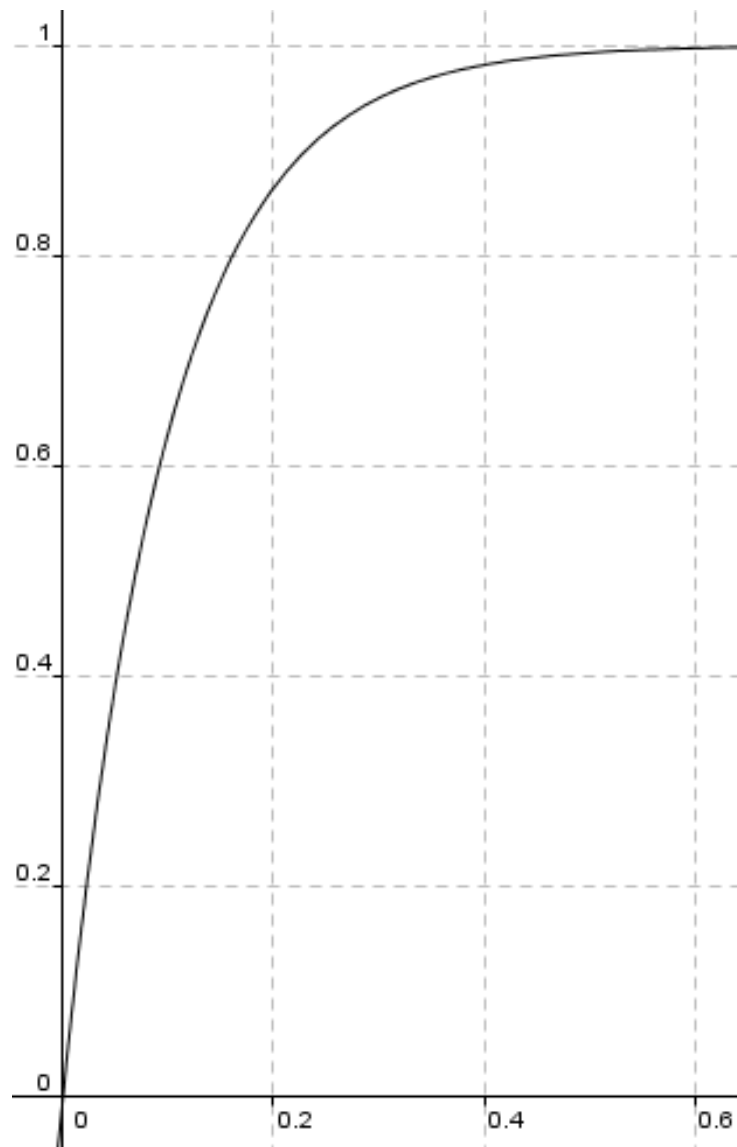
We vinden dus:

$$\begin{aligned} y_f(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-K}{s + \frac{1}{\tau}} + \frac{K}{s} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-K}{s + \frac{1}{\tau}} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{s} \right\} \\ &= -K \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right\} + K \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} \\ &= -K \exp \left(\frac{-t}{\tau} \right) + K \end{aligned}$$

Of dus:

$$y_f(t) = K \left[1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \right] \quad (2.5)$$

Figuur 2.2 toont de stapresponsie. Voor een positieve tijdsconstante bevat het stapant-



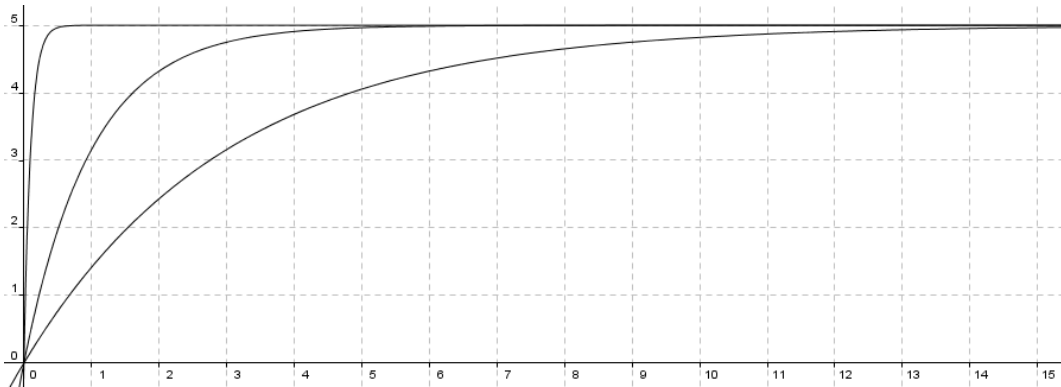
Figuur 2.2: Stapresponsie van een eerste-ordemodel, $K = 1$, $\tau = 0.1$.

woord (2.5) een dalende exponentiële en streeft de uitgang naar een constante waarde (na voldoende lange tijd). Er geldt dat:

- $y_f(t)$ ongeveer 63% van zijn eindwaarde bereikt na 1 tijdsconstante.

- de beginsnelheid van de stapresponsie (op $t = 0$) $\frac{K}{\tau}$ bedraagt.
- de uitgang 95% (99%) van zijn eindwaarde bereikt na een tijd $3 \times \tau$ ($5 \times \tau$).

De gedwongen responsie wordt volledig gekarakteriseerd door de parameters K en τ . Figuur 4.2 toont de gedwongen responsie voor verschillende waarden van τ .



Figuur 2.3: Gedwongen responsie van een eerste-ordesysteem ($\tau = 0.1, 1, 3$).

2.1.3 Totale responsie

De totale responsie is de som van de vrije responsie en de gedwongen responsie:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_{in}(t) + y_f(t) \\ &= y_0 \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) + K \left[1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\right] \end{aligned}$$

De lineariteit van het systeem brengt met zich mee dat de responsie als een som van deze twee delen kan geschreven worden. De totale responsie bevat voor een positieve tijdsconstante termen die afnemen naarmate de tijd toeneemt. De wijze waarop de uitgang verandert alvorens het constant regime te bereiken noemen we het overgangsverschijnsel of transiënt gedrag. De snelheid waarmee het overgangsverschijnsel afneemt wordt beheerst door de tijdsconstante. De waarde die de uitgang aanneemt na voldoende lange tijd wordt

de regime waarde genoemd.

$$y(t) = \underbrace{y_0 \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) - K \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)}_{\text{transiëntgedrag}} + \underbrace{K}_{\text{regimegedrag}} \quad (2.6)$$

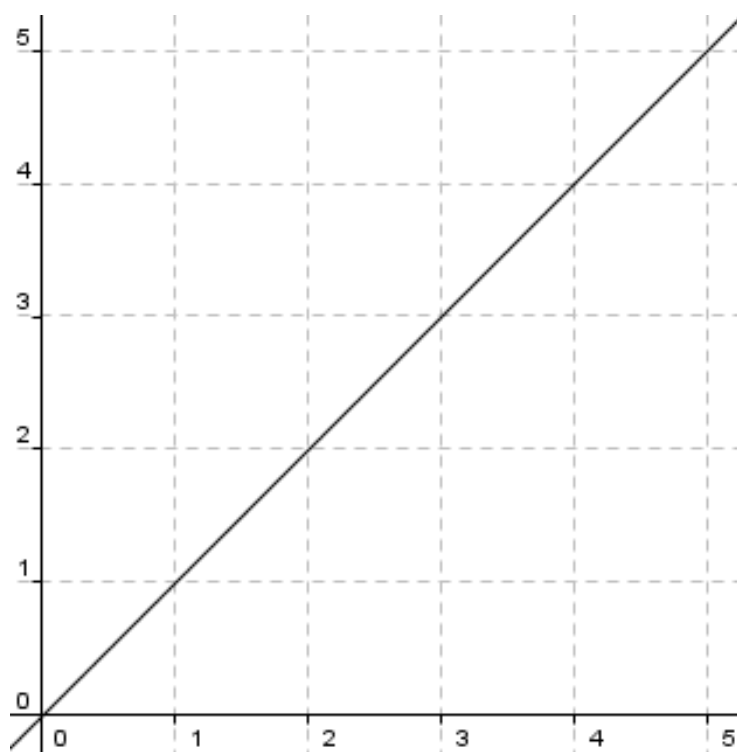
2.2 Integratormodel

We bekijken nu een bijzonder geval van de eerste-ordedynamica, nl. het integratormodel.

De standaard differentiaalvergelijking heeft de volgende vorm:

$$\frac{dy}{dt} = Ku \quad (2.7)$$

K wordt de statische versterking genoemd. Bij een constante ingang u neemt de uitgang voortdurend toe zoals Figuur 2.4 illustreert.



Figuur 2.4: Stapresponsie van een integrator, $K = 1$.

2.3 Toepassingen

2.3.1 Hydraulische systemen

We beperken ons tot systemen die samengesteld zijn uit vaten en leidingen. We beschouwen enkel onsamendrukbare fluïda zoals water. Een fluïdum is onsamendrukbaar als de dichtheid ρ , d.i. massa per eenheid van volume constant is. Dit brengt met zich mee dat de wet van behoud van massa equivalent is met de wet van behoud van volume. Het volume debiet, $[m^3/s]$ als eenvoudig weg debiet, noteren we met het symbool q . Een stationair volume fluïdum oefent in elk punt van het volume een hydrostatische druk $[N/m^2]$ uit. De druk verhoogt naarmate de hoogte van de vloeistofkolom h boven het punt toeneemt volgens de wetmatigheid:

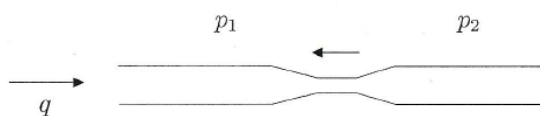
$$p = p_{ref} + \rho gh$$

p_{ref} is een referentiedruk, $g = 9.81 m/s^2$ is de aardversnelling. Over het algemeen wordt voor p_{ref} de druk aan het oppervlak genomen. Voor onze toepassingen is p_{ref} de atmosferedruk p_a . Een stromend fluïdum heeft een bepaalde kinetische energie. De verandering van die kinetische energie t.g.v. bijvoorbeeld een insnoering in een leiding is zeer moeilijk te modelleren met geconcentreerde parameters. We verwaarlozen deze verandering t.o.v. de verandering in de druk voor en na de insnoering. Dit beperkt onze toepassingen tot traagstromende fluïda.

De insnoering

We beschouwen de stroming van een vloeistof doorheen een leiding met een insnoering. T.g.v. de insnoering gaat energie verloren net zoals bij een weerstand in een elektrisch netwerk. We beschouwen een lineair verband tussen het debiet q door de insnoering en de drukval $p_1 - p_2$ over de insnoering. De evenredigheidsconstante stellen we voor door $\hat{R}$.

$$q = \frac{1}{\hat{R}}(p_1 - p_2) \quad (2.8)$$



Figuur 2.5: Insnoering in een leiding.

Het vat

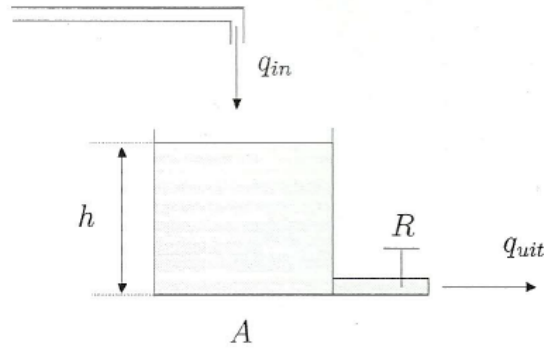
Een vat is een opslagplaats voor fluïdum al of niet voorzien van toevoer- of afvoerleidingen. De basiswet voor het verloop van het peil in een vat is de wet van behoud van massa. In de volgende sectie beschouwen we een aantal combinaties van vaten en leidingen.

Voorbeeld 1

We beschouwen een vat gevuld met een vloeistof en voorzien van een uitstroomdebiet. We wensen na te gaan hoe het vloeistofpeil in een vat wijzigt t.g.v. het in- en uitstromend debiet. We maken gebruik van een aantal symbolen.

- A : de dwarsdoorsnede van het vat [m^2]
- h_i : de hoogte van de vloeistof in het vat i gemeten vanaf de bodem [m]. We noemen dit het vloeistofpeil.
- ρ : de massadichtheid van de vloeistof [kg/m^3].
- q_{in} : het toevoerdebiet [m^3/s].
- q_{uit} : het uitstroomdebiet [m^3/s].
- q_{tss} : het debiet stromend tussen twee vaten [m^3/s].
- $g = 9.81m/s^2$: de aardversnelling.

De dimensie van elk van de gedefinieerde grootheden is aangeduid tussen vierkante haakjes. Volgens de wet van behoud van massa geldt:

**Figuur 2.6:** Vloeistofpeil in een vat.

$$\frac{d}{dt}(Ah) = q_{in} - q_{uit} \quad (2.9)$$

Het uitstroomdebiet hangt af van het peil h en de weerstand R . De vloeistof in het vat zorgt voor een hydrostatische druk $p_1 = \rho gh + p_a$ links van R . Rechts van R heerst de atmosferedruk p_a . Ten gevolge van het drukverschil over de weerstand R stroomt er een debiet doorheen de weerstand R volgens de wetmatigheid (2.9):

$$\rho gh + p_a - p_a = \hat{R}q_{uit} \quad (2.10)$$

dus

$$q_{uit} = \frac{h}{R} \quad (2.11)$$

met

$$R = \frac{\hat{R}}{\rho g}$$

We vervangen q_{uit} door zijn uitdrukking (2.11) in (2.9)

$$\frac{d}{dt}(Ah) = q_{in} - \frac{h}{R} \quad (2.12)$$

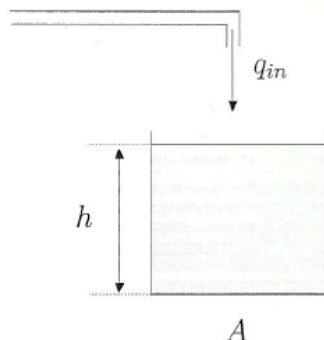
Als we de termen in (2.12) wat herschikken dan vinden we

$$RA \frac{dh}{dt} + h = Rq_{in} \quad (2.13)$$

We vinden als tijdsconstante $\tau = RA$ en statische versterkingsfactor $K = R$.

Voorbeeld 2

In het tweede voorbeeld beschouwen we hetzelfde van maar laten het uitstroomdebiet weg (Figuur 2.7). De massa in het vat bij een bepaalde hoogte h wordt gegeven door ρAh .



Figuur 2.7: Vloeistofpeil in een vat.

Voor een van nul verschillend toevoerdebiet zal het peil in het vat toenemen volgens de wet van behoud van massa:

$$\frac{d(\rho h A)}{dt} = \rho q_{in} \quad (2.14)$$

of na het schrappen van ρ

$$A \frac{dh}{dt} = q_{in} \quad (2.15)$$

Als het toevoerdebiet op nul wordt gezet dan blijft er een zeker peil behouden in het vat. We hebben te maken met het integratormodel waarbij $K = \frac{1}{A}$ de statische versterking voorstelt.

2.3.2 Elektrische systemen

De fundamentele grootheid bij elektrische systemen is de lading (symbool q). Lading wordt gemeten in Coulomb en kan zowel positief als negatief zijn. Objecten met een lading met tegengesteld teken trekken elkaar aan. De grootte van de aantrekkingskracht is proportioneel met de grootte van de lading op ieder object.

Het spanningsverschil (symbool v) tussen twee punten drukt het verrichtte werk uit om een lading van het ene punt naar het andere punt te brengen. De dimensie van spanning is Joule per eenheid van lading en wordt Volt genoemd.

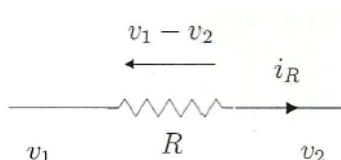
De stroom (symbool i) is een maat voor de verandering van de lading per eenheid tijd doorheen een element. De stroom heeft de dimensie van Coulomb per eenheid van tijd of Ampère. Er geldt:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

We werken met drie types elementen: de weerstand, de inductie en de capaciteit. Telkens idealiseren we deze elementen. Dit houdt bijvoorbeeld in dat een inductie in het ideale geval geen weerstand op capaciteit bevat. Dit stemt niet met de werkelijkheid overeen maar is aanvaardbaar voor de gevallen die wij beschouwen.

De weerstand

Een ideale weerstand is een element dat een functioneel verband geeft tussen de stroom door het element en de spanning over het element. In het lineaire geval is dit verband proportioneel.



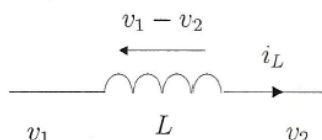
Figuur 2.8: Weerstand.

$$v_R = Ri_R \tag{2.16}$$

(2.16) wordt de wet van Ohm genoemd, met $v_R = v_1 - v_2$. R noemen we de weerstand en heeft als dimensie Ohm, $\frac{1}{R}$ noemen we de conductantie of geleidbaarheid. Een weerstand heeft als eigenschap de stroom te hinderen en zet elektrische energie om in warmte.

De inductie

De inductie is een element dat een functioneel verband geeft tussen de stroom door het element en de integraal van de spanning over het element (Figuur 2.9). Voor een lineaire



Figuur 2.9: Inductie.

inductie is dit verband proportioneel:

$$i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t (v_1 - v_2) dt \quad (2.17)$$

Het spanningsverschil over de inductie noteren we eenvoudigheidshalve als v_L :

$$v_1 - v_2 = v_L$$

De uitdrukking (2.17) wordt nu

$$v_L = L \frac{di_L}{dt} \quad (2.18)$$

De constante L wordt de inductantie genoemd en heeft als dimensie Henri.

De capaciteit

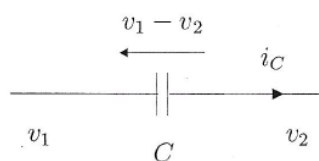
Een ideale, lineaire capaciteit geeft een proportioneel verband tussen het spanningsverschil over het element en de hoeveelheid overgebrachte lading.

$$q = C(v_1 - v_2) \quad (2.19)$$

of

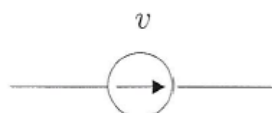
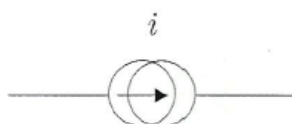
$$i_C = \frac{dq}{dt} = C \frac{dv_C}{dt} \quad (2.20)$$

De evenredigheidsconstante noemt men de capaciteit en wordt uitgedrukt in Farad $[F]$. Voor de praktische uitvoering van weerstanden, inducties en capaciteiten verwijzen we naar het opleidingsonderdeel elektrotechniek en elektronica.

**Figuur 2.10:** Capaciteit.

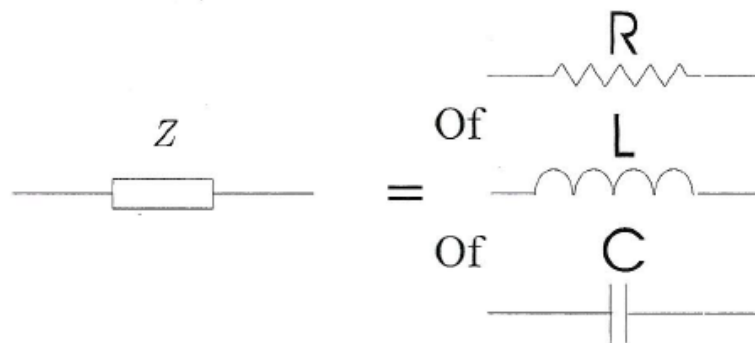
Bronnen

De ingangen van een elektrisch systeem zijn afwel stromen ofwel spanningen, eventueel tijdsvariërend. De figuren 2.11 en 2.12 tonen de gebruikte symbolen voor een spanningsbron en een stroombron. Een ideale **spanningsbron** is een element waarvan de spanning een vooropgegeven tijdsfunctie is, onafhankelijk van de stroom. Een ideale **stroombron**

**Figuur 2.11:** Spanningsbron.**Figuur 2.12:** Stroombron.

is een element waarvan de stroom een vooropgegeven tijdsfunctie is; onafhankelijk van de spanning.

Vanaf nu gebruiken we het algemeen symbool Z om (combinaties van) weerstanden, inducties en capaciteiten weer te geven.



Figuur 2.13: Notatie.

Serieschakeling

De stroom door elk van de elementen is dezelfde. Figuur 2.14 toont een serieschakeling van twee elementen. De uitdrukking voor Z_{serie} hangt ook af van het netwerkelement.



Figuur 2.14: Serieschakeling.

- weerstand

$$Z_{serie} = R_{serie} = R_1 + R_2$$

- inductie

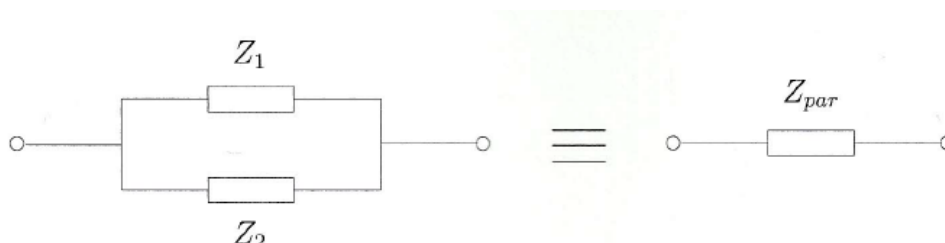
$$Z_{serie} = L_{serie} = L_1 + L_2$$

- capaciteit

$$\frac{1}{Z_{serie}} = \frac{1}{C_{serie}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Parallelschakeling

De spanningsval over parallel geschakelde elementen is dezelfde. Figuur 2.15 toont een parallelschakeling van twee elementen. Voor de verschillende netwerkelementen geldt:



Figuur 2.15: Parallelschakeling.

- weerstand

$$\frac{1}{Z_{par}} = \frac{1}{R_{par}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

- inductie

$$\frac{1}{Z_{par}} = \frac{1}{L_{par}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

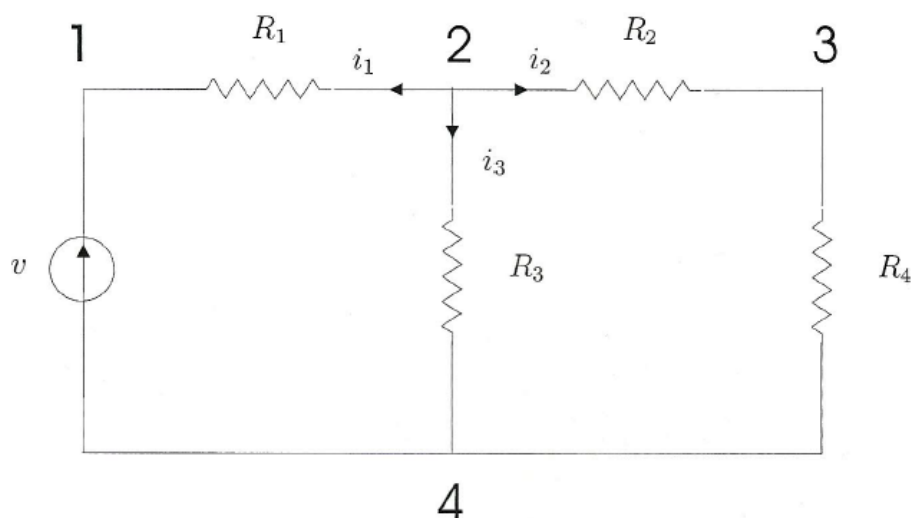
- capaciteit

$$Z_{par} = C_{par} = C_1 + C_2$$

Bovenstaande formules kunnen uitgebreid worden voor het geval er n elementen in serie of parallel staan.

Wetten van Kirchoff

We kunnen een elektrisch netwerk omschrijven als een verzameling van elementen en knooppunten en een lijst die aangeeft welk element met welk knooppunt is verbonden. Neem als voorbeeld Figuur 2.16. Het netwerk telt 1 spanningsbron; 4 weerstanden en 4 knooppunten. Per knooppunt kunnen we de **stroomwet van Kirchoff** uitschrijven: *De algebraïsche som van alle stromen die doorheen een knooppunt vloeien is nul.* Met algebraïsche som bedoelen we dat de stroom een teken krijgt. Bijvoorbeeld alle stromen die



Figuur 2.16: Netwerk.

naar het knooppunt vloeien zijn positief, die ervan wegvloeien zijn negatief. Het kan ook omgekeerd, dit hangt af van de tekenafspraken. Voor knooppunt 2 op Figuur 2.16 geldt:

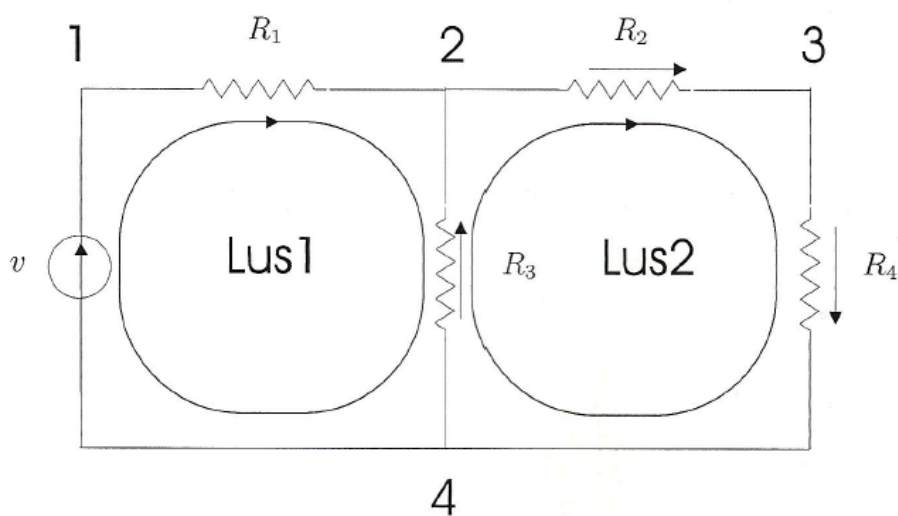
$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

De stroomwet kunnen we per knooppunt uitschrijven. Een elektrisch netwerk bevat ook een aantal lussen. Het netwerk van Figuur 2.17 bevat twee lussen. De lussen worden in een bepaalde zin doorlopen. Een spanningsval die overeenstemt met de zin van de lus nemen we als positief. Per lus kunnen we de **spanningswet van Kirchoff uitschrijven**: *De algebraïsche som van alle spanningsvallen in een gesloten lus is nul*. Voor lus 2 geldt:

$$v_3 - v_2 + v_4 - v_3 + v_2 - v_4 = 0$$

Voorbeeld

We beschouwen het RC -netwerk van Figuur 2.24. We zoeken het verband tussen de

**Figuur 2.17:** Netwerk.

spanning v van de bron en de spanning v_C over de capaciteit. Er geldt:

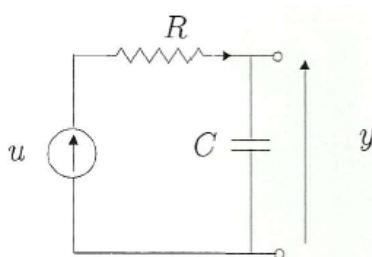
$$v - v_R - v_C = 0 \quad (2.21)$$

$$v_R = Ri_R \quad (2.22)$$

$$i_R = C \frac{dv_C}{dt} \quad (2.23)$$

(2.23) samen geeft ons:

$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = v \quad (2.24)$$

**Figuur 2.24:** RC -kring**Figuur 2.18:** Voorbeeld 1.

We vinden een eerste-ordemodel met als tijdsconstante $\tau = RC$ en versterkingsfactor $K = 1$.

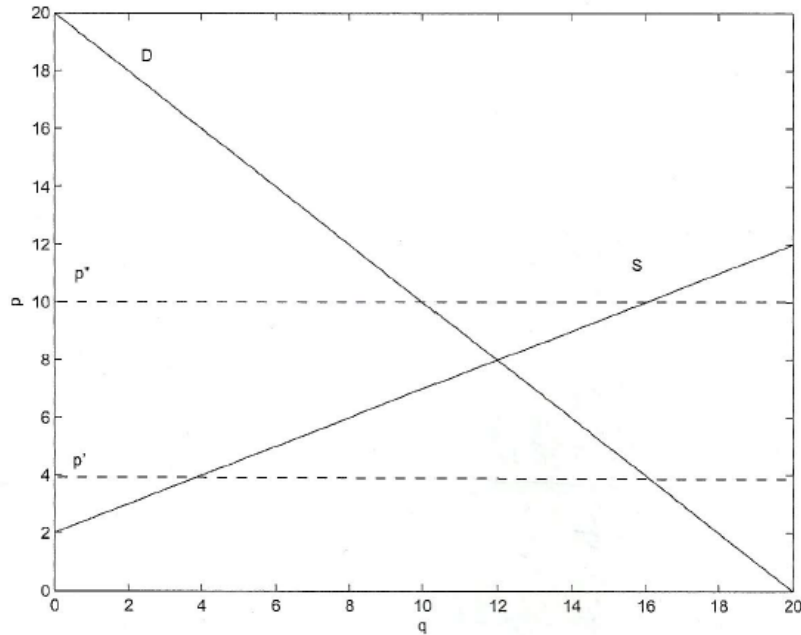
2.3.3 Het evenwicht tussen vraag en aanbod

De meest eenvoudige modellen die het evenwicht tussen vraag en aanbod bestuderen gedragen zich eveneens volgens een eerste-ordedynamica. De evolutie naar een marktevenwicht bekijken we met behulp van de begrippen tijdsconstante, vrije responsie, ... Uit de micro-economie weten we dat er binnen een perfecte competitieve markt evenwicht heerst als vraag en aanbod gelijk zijn. We beperken ons tot het simpel geval waarbij de vraag (D) en het aanbod (S) van een handelswaar enkel van de prijs (p) van dit handelswaar afhangen volgens een lineaire functie:

$$D = a + bp \quad (2.25)$$

$$S = a_1 + b_1 p \quad (2.26)$$

We bekijken de invloed van twee alternatieve onderstellingen omtrent de prijsevolutie. Volgens Walras geldt dat de prijs p de tendens heeft tot stijgen (dalen) als de excessieve vraag positief (negatief) is. Volgens Marshall geldt dat de hoeveelheid q de tendens heeft tot stijgen (dalen) als de excessieve vraagprijs positief (negatief) is. We leggen beide begrippen uit aan de hand van Figuren 2.19 en 2.20. We beschouwen het normale geval waarbij de vraag een negatieve en het aanbod een positieve helling heeft in functie van de prijs. De excessieve vraag is het verschil tussen de hoeveelheid die de kopers willen kopen aan een bepaalde prijs en de geproduceerde hoeveelheid bij die prijs. Op Figuur 2.19 is de excessieve vraag positief bij p' ($D(p') - S(p')$) en negatief bij p'' ($D(p'') - S(p'')$). De excessieve vraagprijs is het verschil tussen de prijs die de kopers willen betalen voor een bepaalde hoeveelheid en de prijs die nodig is om een bepaalde hoeveelheid te produceren. Figuur 2.20 toont een voorbeeld van een positieve (hoeveelheid q') en een negatieve vraagprijs (hoeveelheid q''). Het onderliggende idee bij Walras is dat ontevreden klanten de prijs omhoog jagen. Het onderliggend idee bij Marshall is dat bij een positieve excessieve vraagprijs de producenten



Figuur 2.19: Excessieve vraag, p =prijs, q =hoeveelheid

de productiehoeveelheid winstvol kunnen opdrijven. De dynamische vertaling van de onderstelling van Walras is:

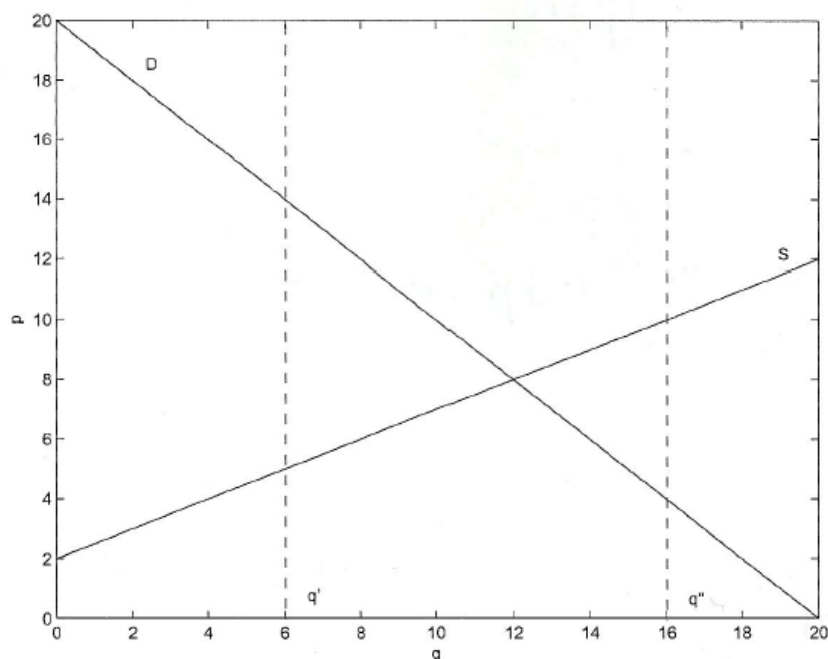
$$\frac{dp}{dt} = f[D(p) - S(p)] \quad (2.27)$$

Met $f(\cdot)$ een functie die het teken van zijn argument behoudt, $f(0) = 0$ en $\left. \frac{df}{dt} \right|_0 > 0$. De dynamische vertaling van de onderstelling van Marshall is:

$$\frac{dq}{dt} = g[D^{-1}(p) - S^{-1}(p)] \quad (2.28)$$

met $g(\cdot)$ een functie die het teken van zijn argument behoudt, $g(0) = 0$ en $\left. \frac{dg}{dt} \right|_0 > 0$. $D^{-1}(p)$ en $S^{-1}(p)$ stellen de inverse functies van $D(p)$ en $S(p)$ voor. We vertrekken van de lineaire wetten (2.26) en stellen beide modellen (Walras + Marshall) op. De prijsevolutie volgens Walras wordt:

$$\frac{dp}{dt} = a + bp - a_1 - b_1p \quad (2.29)$$



Figuur 2.20: Excessieve vraagprijs, p =prijs, q =hoeveelheid

In evenwicht geldt $\frac{dp}{dt} = 0$ of dus $a + bp - a_1 - b_1p = 0$. We vinden als evenwichtspunt:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} = 0 &\Leftrightarrow (a - a_1) = (b_1 - b)p \\ &\Leftrightarrow p_e = \frac{a - a_1}{b_1 - b} \end{aligned}$$

We onderstellen dat $p_e > 0$ en bekijken de afwijkingen uit evenwicht Δp , d.i.:

$$p = p_e + \Delta p$$

We herschrijven (2.29) als:

$$\frac{d(p_e + \Delta p)}{dt} = a + b(p_e + \Delta p) - a_1 - b_1(p_e + \Delta p) \quad (2.30)$$

uitwerking levert:

$$\begin{aligned}
 \frac{d(p_e + \Delta p)}{dt} &= a + b \frac{(a - a_1)}{b_1 - b} + b\Delta p - a_1 - b_1 \frac{(a - a_1)}{b_1 - b} - b_1\Delta p \\
 &= \frac{(a - a_1)(b - b_1) + (a - a_1)(b_1 - b)}{b_1 - b} + \Delta p(b - b_1) \\
 &= \frac{(a - a_1)(b - b - b_1 + b_1)}{b_1 - b} + \Delta p(b - b_1)
 \end{aligned}$$

of dus

$$\frac{d(p_e + \Delta p)}{dt} = (b_1 - b)\Delta p = 0 \quad (2.31)$$

herleiden naar de standaardvorm levert ons:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{b_1 - b} \frac{d(p_e + \Delta p)}{dt} + \Delta p &= 0 \\
 \underbrace{\frac{1}{b_1 - b}}_{\tau_w} \cdot \frac{d\Delta p}{dt} + \Delta p &= 0
 \end{aligned}$$

Een studie van het marktevenwicht is dus niets anders dan een studie van de vrije responsie van (2.31) met tijdsconstante $\tau_w = \frac{1}{b_1 - b}$. Bij een afwijking Δp_0 op $t = 0$ krijgen we volgend tijdsverloop:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{b_1 - b} \frac{d\Delta p}{dt} + \Delta p \right\} &= \tau_w (sP(s) - \Delta p_0) + P(s) = 0 \\
 P(s)(\tau_w s + 1) &= \tau_w \Delta p_0 \\
 P(s) &= \frac{\tau_w \Delta p_0}{\tau_w s + 1}
 \end{aligned}$$

inverse Laplacetransformatie levert:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\tau_w \Delta p_0}{\tau_w s + 1} \right\} &= \Delta p_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + \frac{1}{\tau_w}} \right\} \\
 &= \Delta p_0 \exp \left(\frac{-t}{\tau_w} \right)
 \end{aligned}$$

we vinden dus:

$$\Delta p(t) = \Delta p_0 \exp \left(\frac{-t}{\tau_w} \right) \quad ; \quad p(t) = p_e + \Delta p(t)$$

We herhalen dit alles voor het model volgens Marshall. We maken gebruik van de inverse wetten:

$$D^{-1}(p) \quad : \quad p = \frac{1}{b}(q - a) \quad (2.32)$$

$$S^{-1}(p) \quad : \quad p = \frac{1}{b_1}(q - a_1) \quad (2.33)$$

Het model (2.28) wordt:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{b}(q - a) - \frac{1}{b_1}(q - a_1) \quad (2.34)$$

In evenwicht $\left(\frac{dq}{dt} = 0\right)$ hebben we:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{q - a}{b} - \frac{q - a_1}{b_1} \\ \frac{q - a}{b} &= \frac{q - a_1}{b_1} \\ b_1q - b_1a - bq + ba_1 &= 0 \\ q(b_1 - b) &= -ba_1 + b_1a \\ q_e &= \frac{-ba_1 + b_1a}{b_1 - b} = \frac{a_1b - ab_1}{b - b_1} \end{aligned}$$

Opnieuw beschouwen we een afwijking uit evenwicht Δq en definiëren we $q(t) = q_e + \Delta q$.

Na beschrijven en herschikken van (2.34) vinden we:

$$\begin{aligned}
\frac{q_e + \Delta q}{dt} &= \frac{q_e + \Delta q - a}{b} - \frac{q_e + \Delta q - a_1}{b_1} \\
\frac{\Delta q}{dt} &= \frac{\frac{a_1 b - ab_1}{b - b_1} + \Delta q - a}{b} - \frac{\frac{a_1 b - ab_1}{b - b_1} + \Delta q - a_1}{b_1} \\
&= \frac{\frac{a_1 b - ab_1}{b - b_1} b_1 + \Delta q b_1 - ab_1}{bb_1} - \frac{\frac{a_1 b - ab_1}{b - b_1} b + \Delta q b - a_1 b}{b_1 b} \\
&= \frac{\frac{(a_1 b - ab_1)b_1 + \Delta q b_1(b - b_1) - ab_1(b - b_1)}{b - b_1}}{bb_1} - \frac{\frac{(a_1 b - ab_1)b + \Delta q b(b - b_1) - a_1 b(b - b_1)}{b - b_1}}{b_1 b} \\
&= \frac{(a_1 b - ab_1)b_1 + \Delta q b_1(b - b_1) - ab_1(b - b_1) - [(a_1 b - ab_1)b + \Delta q b(b - b_1) - a_1 b(b - b_1)]}{(b - b_1)bb_1} \\
&= \frac{\Delta q b_1(b - b_1) - \Delta q b(b - b_1)}{(b - b_1)bb_1} \\
&= \frac{\Delta q b_1 - \Delta q b}{bb_1} \\
&= \frac{\Delta q(b_1 - b)}{bb_1}
\end{aligned}$$

herwerking naar standaardvorm levert:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta q}{dt} + \frac{b - b_1}{bb_1} \Delta q &= 0 \\
\underbrace{\frac{bb_1}{b - b_1}}_{\tau_m} \frac{\Delta q}{dt} + \Delta q &= 0
\end{aligned} \tag{2.35}$$

We hebben een eerste-ordedynamica met tijdsconstante τ_m . Het bestuderen van de hoeveelheid $q(t)$ is het bestuderen van de vrije responsie van (2.35). Laplace transformeren levert:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \left\{ \tau_m \frac{d\Delta q}{dt} + \Delta q \right\} &= \tau_m (sQ(s) - \Delta Q_0) + Q(s) = 0 \\
Q(s)(\tau_m s + 1) &= \tau_m \Delta Q_0 \\
Q(s) &= \frac{\tau_m \Delta q_0}{\tau_m s + 1}
\end{aligned}$$

inverse Laplacetransformatie levert:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\tau_m \Delta q_0}{\tau_m s + 1}\right\} &= \Delta q_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + \frac{1}{\tau_m}}\right\} \\ &= \Delta q_0 \exp\left(\frac{-t}{\tau_m}\right)\end{aligned}$$

we vinden dus:

$$\Delta q(t) = \Delta q_0 \exp\left(\frac{-t}{\tau_m}\right) \quad ; \quad q(t) = q_e + \Delta q(t)$$

Wat gebeurt er nu als de modellen toegepast worden op niet alledaagse gevallen? Herinner:

$$\begin{aligned}D &= a + bp \\ S &= a_1 + b_1 p\end{aligned}$$

We voeren nu een gevallenonderzoek uit

- $b > 0$ en $b_1 > 0$

$$\begin{aligned}\tau_w &= \frac{1}{b_1 - b} \\ \tau_m &= \frac{b_1 b}{b - b_1}\end{aligned}$$

Dit biedt nog steeds geen uitsluitel over het teken van τ_w en τ_m .

– $b > b_1$: nu is de helling van de vraagcurve groter dan die van de aanbodcurve.

Dan is $\tau_w < 0$ en $\tau_m > 0$. Dan voorspelt Walras dat we een prijsspiraal krijgen:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Delta p_0 \exp\left(\frac{-t}{\tau_w}\right) = +\infty$$

Terwijl volgens Marshall de hoeveelheid naar een evenwicht zal convergeren:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Delta q_0 \exp\left(\frac{-t}{\tau_m}\right) = 0$$

De twee modellen spreken elkaar in dit geval dus tegen.

- $b < b_1$: nu is de helling van de aanbodcurve groter dan die van de vraagcurve. Dan is $\tau_w > 0$ en $\tau_m < 0$. Dan voorspelt Walras dat de prijs naar een evenwicht zal convergeren:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Delta p_0 \exp\left(\frac{-t}{\tau_w}\right) = 0$$

Terwijl volgens Marshall er een hoeveelheidsspiraal zal ontstaan:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Delta q_0 \exp\left(\frac{-t}{\tau_m}\right) = +\infty$$

- $b < 0$ en $b_1 < 0$

$$\begin{aligned}\tau_w &= \frac{1}{b_1 - b} \\ \tau_m &= \frac{b_1 b}{b - b_1}\end{aligned}$$

Dit biedt nog steeds geen uitsluitel over het teken van τ_w en τ_m .

- $b > b_1$: nu is de helling van de vraagcurve (in absolute waarde) groter dan die van de aanbodcurve. Dan is $\tau_w > 0$ en $\tau_m < 0$. Dan voorspelt Walras dat de prijs naar een evenwichtswaarde convergeert:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Delta p_0 \exp\left(\frac{-t}{\tau_w}\right) = 0$$

Terwijl we volgens Marshall een hoeveelheidsspiraal krijgen:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Delta q_0 \exp\left(\frac{-t}{\tau_m}\right) = +\infty$$

De twee modellen spreken elkaar in dit geval dus tegen.

- $b < b_1$: nu is de helling van de aanbodcurve (in absolute waarde) groter dan die van de vraagcurve. Dan is $\tau_w < 0$ en $\tau_m > 0$. Dan voorspelt Walras een prijs-spiraal:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Delta p_0 \exp\left(\frac{-t}{\tau_w}\right) = +\infty$$

Terwijl volgens Marshall de hoeveelheid naar een evenwichtswaarde zal convergeren:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Delta q_0 \exp\left(\frac{-t}{\tau_m}\right) = 0$$

- $b > 0$ en $b_1 < 0$

$$\begin{aligned}\tau_w &= \frac{1}{b_1 - b} \\ \tau_m &= \frac{b_1 b}{b - b_1}\end{aligned}$$

Dit betekent: $\tau_w < 0$ en $\tau_m < 0$. Hier zijn de modellen het dus wel eens:

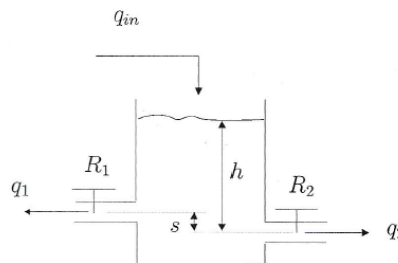
$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} \Delta p_0 \exp\left(\frac{-t}{\tau_w}\right) &= +\infty \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \Delta q_0 \exp\left(\frac{-t}{\tau_m}\right) &= +\infty\end{aligned}$$

We krijgen dus een prijs- en hoeveelheidsspiraal.

2.4 Oefeningen

2.4.1 Opslagtank

Een opslagtank heeft twee uitlaten. Geef de differentiaalvergelijking van de hoogte h in



Figuur 2.21: Vloeistofpeil in een vat.

functie van het ingaand debiet q_{in} . Verder geldt: $h > s$.

2.4.2 Watertoren

We beschouwen een watertoren. Met behulp van een pomp en een meet- en regelsysteem wordt het peil in het reservoir bovenaan constant gehouden. De afmetingen van de pomp

en het regelsysteem zijn beperkt. In een noodgeval waar grote hoeveelheden water vereist zijn op een korte tijd (vb brand) is de pomp niet in staat dit te leveren. Dan schakelt men de pomp af en laat men het reservoir leeglopen. Maak gebruik van de numerieke gegevens op Figuur 2.22 en bereken de tijd die nodig is om het reservoir volledig leeg te laten lopen in een crisissituatie.

2.4.3 Dimensionering van een vat

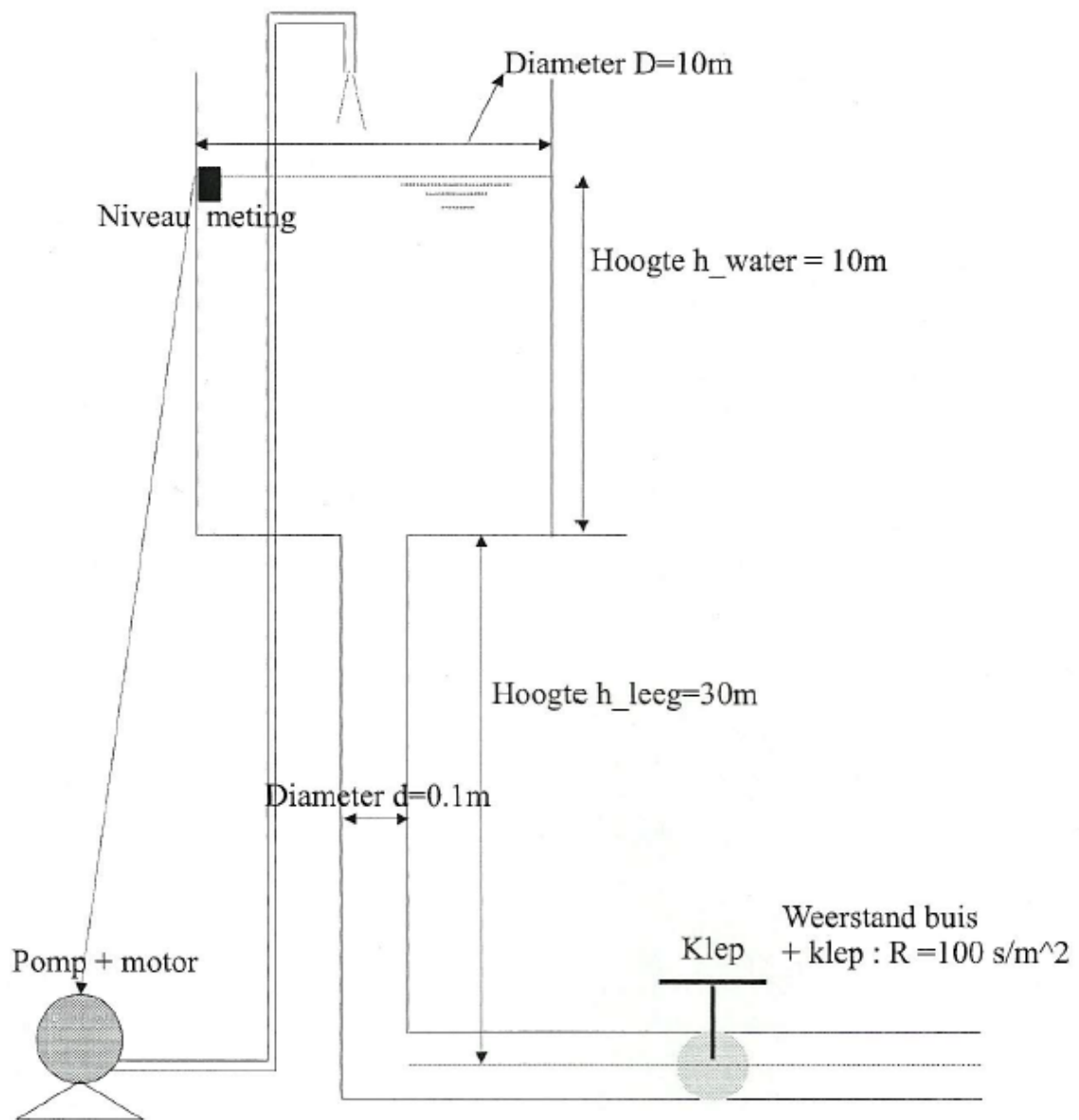
Bij de installatie van een machine heeft men het volgende probleem. Het debiet van de pomp bij het wegzuigen van het water is hoger dan het maximale debiet die de afvoerleiding kan verwerken. Een mogelijke manier om dit op te lossen is het plaatsen van een vat tussen de machine en de afvoerbuizen zoals aangeduid op Figuur 2.23. Het vat heeft een hoogte van 0.45 m en een dwarsdoorsnede met als oppervlakte $A = 0.37\text{ m}^2$. De afvoerleiding heeft een weerstand van 1000 s/m^2 en kan een maximaal debiet van 20 liter per minuut verwerken. Indien de grens van 20 liter per minuut wordt overschreden zullen andere delen van het gebouw hiervan hinder ondervinden.

1. Stel een model op dat het verband geeft tussen de hoogte in het vat en het ingaande debiet.
2. Neem een leeg vat voor $t \leq 0$. Beschouw het geval waarbij de pomp geen debiet levert voor $t < 0$, vanaf $t = 0$ een debiet van 55 liter per minuut levert gedurende 4 minuten en daarna geen debiet meer levert. Ga na of de afmetingen van het gekozen vat goed ontworpen zijn. Dit betekent dat het vat niet mag overlopen en dat het afvoerdebiet niet de 20 liter per minuut mag overschrijden.

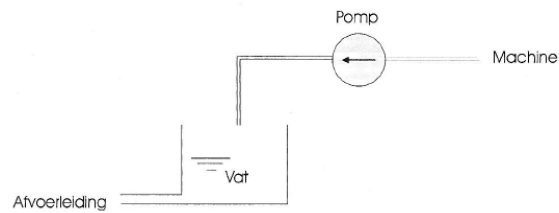
2.4.4 Opladen van een condensator

Beschouw onderstaand elektrisch schema.

1. Stel de differentiaalvergelijking op met u als ingang en y als uitgang. We nemen aan dat de spanning over de condensator nul is op $t = 0$.

**Figuur 2.22:** Watertoren.

2. Bepaal de tijdsconstante en de versterkingsfactor.
3. Schets kwalitatief het verloop van de responsie $y(t)$ als de ingang volgende gedaante

**Figuur 2.23:** pomp + vat.

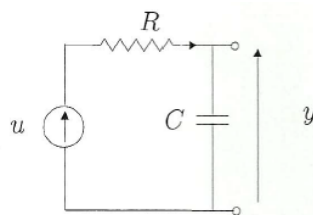
heeft:

$$u = 0 \quad t < 0$$

$$u = 10 \quad t > 0$$

2.4.5 Radioactiviteit

We bestuderen het tijdsverloop van de hoeveelheid radioactieve atomen. Radioactief materiaal vervalt met een snelheid die evenredig is met het aantal atomen dat nog steeds radioactief is. De halfwaardetijd, dit is de tijd nodig om de radioactiviteit te halveren t.o.v. de initiële waarde, is gelijk aan 1 jaar. Bepaal de tijdsconstante en de tijd nodig om nog slechts 10% van het initieel aantal atomen over te houden.

**Figuur 2.24:** RC -kring**Figuur 2.24:** RC -kring.

2.4.6 Cuspig Containers

De Londense firma “Cuspig Containers” produceert plastic afvalcontainers. Het machinepark heeft momenteel een capaciteit van 2500 machines. Een marktonderzoek wijst uit dat de vraag naar de containers binnen een 10 jaar zal verdubbelen. Het bedrijf beslist om de capaciteit van het machinepark te verhogen door jaar na jaar in toenemende mate machines aan te kopen en dit gespreid per jaar. Ruw geschat gaat men het eerste jaar 100 machines kopen, het tweede jaar 200 enz. Merk op dat door dit beleid de totale capaciteit na 10 jaar een waarde groter zal hebben dan 5000. De reden hiervoor is dat de bedrijfsleiding moet rekening houden met het verval in rendement van de oudere machines. Oudere machines zullen periodes buiten dienst zijn wegens herstel of uiteindelijk vervangen worden. Om hierop te anticiperen worden meer machines aangekocht over de 10 jaar dan wat zou nodig zijn mochten alle machines intact blijven. Uit ervaring verwacht men een verval van 5% per jaar. Een foute inschatting van het verval, d.i. de parameter $\delta = \frac{5}{100}$, kan leiden tot een tekort of tot een overcapaciteit van het machinepark. Daarom wordt een model opgesteld om dit te bestuderen. We zoeken $x(t)$ de capaciteit (i.e. het aantal machines) en beschouwen dit als een continue functie van de tijd. Dit is uiteraard een benadering van de werkelijkheid. Eén tijdseenheid komt overeen met één jaar. De geplande expansie heeft als verloop:

$$100 \quad 200 \quad 300 \quad \dots \quad 100t$$

Het toegevoegde aantal machines op tijdstip t is dus:

$$(100 + 200 + 300 + \dots + 100t)$$

We kunnen dit herschrijven als:

$$\frac{100t(t+1)}{2} \tag{2.36}$$

Het verval, d.i. de vermindering per eenheid van tijd van de capaciteit t.g.v. de veroudering heeft als uitdrukking $-\delta x$.

1. Stel het eerste-ordemodel op waarmee het verloop van de capaciteit $x(t)$ in functie van de tijd kan bestudeerd worden.

2. Hoe verloopt $x(t)$ gedurende de 10 jaar?
3. Stel dat de veroudering van de machines δ verkeerd werd ingeschat. Bespreek het gevolg voor het bedrijf bij zowel een overschatting (δ te groot) als een onderschatting (δ te klein).

2.4.7 Appels

Appels worden tijdens hun groei vaak met pesticiden besproeid. Als iemand appels eet, dan stapelen de pesticiden zich op in het lichaam. We noemen P de concentratie van de pesticiden in het lichaam. Het verval van de concentratie aan pesticiden in menselijk weefsel is evenredig met de concentratie zelf, met een evenredigheidsconstante δ . De toename van de pesticiden is gelijk aan $\sigma = \alpha A$, waarbij α de concentratie is van de pesticiden per appel en A het aantal appels dat per dag wordt gegeten.

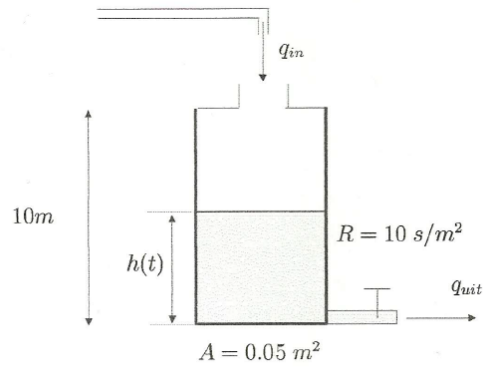
1. Geef het model van $P(t)$ waarbij de tijd t uitgedrukt wordt in dagen.
2. Neem een persoon van 20 jaar die vanaf de leeftijd van 1 jaar steeds dezelfde hoeveelheid appels per dag eet. Geef de uitdrukking en een schets van het verloop van $P(t)$.
3. Neemt de concentratie $P(t)$ steeds toe als men decades lang dezelfde hoeveelheid appels eet per dag?
4. Stel dat een persoon beslist geen appels meer te eten. Hoelang duurt het eer de concentratie gezakt is naar $\frac{1}{10}$ van de beginconcentratie als de halfwaarde tijd van het verval 50 dagen bedraagt? De halfwaarde tijd is de tijd nodig om de concentratie te halveren t.o.v. de initiële waarde.

2.4.8 Accumulatorvat

Een watercircuit bevat een accumulatievat met de afmetingen van Figuur 2.25.

1. Indien het vat initieel vol is, hoeveel tijd is er nodig om het peil 10 cm te doen zakken?

2. Indien het vat volledig leeg is op $t = 0$, bepaal het constante toevoerdebiet dat in evenwicht zal leiden tot een half vol vat.



Figuur 1: Vloeistofpeil in een vat.

Figuur 2.25: Vloeistofpeil in een vat.

2.5 Oplossingen

2.5.1 Opslagtank

We stellen eerst de balansvergelijking op:

$$\frac{d}{dt}(Ah) = q_{in} - q_1 - q_2 \quad (2.37)$$

Vervolgens bepalen we q_1 en q_2 :

$$\begin{aligned} \tilde{R}q_1 &= \rho g(h - s) \\ \Leftrightarrow q_1 &= \frac{\rho g(h - s)}{\tilde{R}} \\ \Leftrightarrow q_1 &= \frac{h - s}{R_1} \quad \text{met } R_1 = \frac{\tilde{R}}{\rho g} \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} \hat{R}q_2 &= \rho hg + p_{atm} - p_{atm} \\ \Leftrightarrow q_2 &= \frac{\rho hg}{\hat{R}} \\ \Leftrightarrow q_2 &= \frac{h}{R_2} \quad \text{met } R_2 = \frac{\hat{R}}{\rho g} \end{aligned} \quad (2.39)$$

uit (2.38) en (2.39) volgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Ah) &= q_{in} - \frac{h - s}{R_1} - \frac{h}{R_2} \\ \Leftrightarrow A \frac{dh}{dt} + h \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{s}{R_1} &= q_{in} \\ \Leftrightarrow A \frac{dh}{dt} + h \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right) &= q_{in} + \frac{s}{R_1} \\ \Leftrightarrow \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} A \frac{dh}{dt} + h &= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} q_{in} + \frac{R_2 s}{R_1 + R_2} \end{aligned}$$

In evenwicht geldt: $\frac{dh}{dt} = 0$ en $q_{in} = 0$. Dit levert:

$$h_{ev} = \frac{R_2 s}{R_1 + R_2}$$

Stel $h = h_{ev} + \Delta h$ vervangen levert:

$$\begin{aligned} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} A \frac{d(h_{ev} + \Delta h)}{dt} + \Delta h &= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} q_{in} \\ \Leftrightarrow \underbrace{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} A}_{\tau_o} \frac{d\Delta h}{dt} + \Delta h &= \underbrace{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} q_{in}}_{K_o} \end{aligned}$$

Laplace transformatie, splitsen in partieelbreuken en inverse Laplace transformatie levert:

$$\Delta h(t) = \Delta h_0 \exp\left(\frac{-t}{\tau_o}\right) + K \left[1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau_o}\right)\right]$$

De algemene oplossing is dan:

$$h(t) = \Delta h_0 \exp\left(\frac{-t}{\tau_o}\right) + K \left[1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau_o}\right)\right] + h_{ev} \quad (2.40)$$

2.5.2 Watertoren

Gevraagd: de tijd die nodig is om het reservoir leeg te laten lopen. Dit betekent dat we een vrije responsie moeten bestuderen. Het model is als volgt:

$$\begin{aligned} \frac{d(Ah)}{dt} + \frac{h}{R} &= 0 \\ \Leftrightarrow \underbrace{AR}_{\tau} \frac{dh}{dt} + H &= 0 \end{aligned}$$

we weten ook:

$$\begin{aligned} \tau = AR &= 100 \frac{s}{m^2} \pi 25 m^2 \\ &= 2500 \pi s \end{aligned}$$

verder geldt:

$$h(t) = h_0 \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$$

$h_0 = 40 \text{ m}$ en $h_{leeg} = 30 \text{ m}$. Dit geeft ons:

$$\begin{aligned} 30 &= 40 \exp\left(\frac{-t_{leeg}}{\tau}\right) \\ \Leftrightarrow \exp\left(\frac{-t_{leeg}}{\tau}\right) &= \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow \exp\left(\frac{-t_{leeg}}{2500\pi}\right) &= \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow \ln\left(\frac{3}{4}\right) &= \frac{-t_{leeg}}{2500\pi} \\ \Leftrightarrow t_{leeg} &= -2500\pi \ln\left(\frac{3}{4}\right) \end{aligned}$$

Of 37 minuten en 40 seconden.

2.5.3 Dimensionering van een vat

Gegeven:

- $h = 0,45 \text{ m}$
- $A = 0,37 \text{ m}^2$
- $R = 1000 \frac{\text{s}}{\text{m}^2}$
- $q_{max} = 20 \text{ liter/minuut} = \frac{20}{60} \frac{1}{1000} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$

1. differentiaalvergelijking:

$$\frac{d(Ah)}{dt} = q_{in} - q_{uit}$$

q_{uit} is:

$$\begin{aligned} \hat{R}q_{uit} &= \rho h g \\ q_{uit} &= \frac{\rho h g}{\hat{R}} \\ q_{uit} &= \frac{h}{R} \quad \text{met} \quad R = \frac{\hat{R}}{\rho g} \end{aligned}$$

of dus:

$$\underbrace{AR}_{\tau} \frac{dh}{dt} + h = \underbrace{R}_K q_{in} \quad (2.41)$$

$$2. \text{ Verder geldt: } \begin{cases} t \leq 0 & \Rightarrow \text{vat is leeg} \\ 0 < t < 240s & \Rightarrow q_{in} = \frac{55}{60} \frac{1}{1000} \frac{m^3}{s} \\ t \geq 240s & \Rightarrow q_{in} = 0 \end{cases}$$

We weten:

- $h(0) = 0$
- $\tau = RA = 370 \text{ s}$
- $K = R = 1000 \frac{m^3}{s}$

(a) $0 < t < 240 \Rightarrow$ gedwongen responsie

$$\begin{aligned} h(t) &= K \times (\text{grootte van de stap}) \times \left[1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \right] \\ &= 1000 \times \frac{55}{60} \times \frac{1}{1000} \times \left[1 - \exp\left(\frac{-t}{370}\right) \right] \end{aligned}$$

(b) $t \geq 240 \Rightarrow$ vrije responsie

$$\begin{aligned} h(t) &= h_0 \exp\left(\frac{-t}{370}\right) \\ h_0 = h(240) &= \frac{55}{60} \times \left[1 - \exp\left(\frac{-240}{370}\right) \right] = 0,4475 \text{ m} \end{aligned}$$

Het vat loopt dus net niet over.

3.

$$h(t) = 0,4475 \exp\left(\frac{-t}{370}\right)$$

Dit is een dalende exponentiële: het debiet zal dus nooit groter worden dan het debiet in de beginsituatie. We weten ook dat $q_{max} = 20 \text{ liter/minuut}$.

$$\begin{aligned} q_{uit} &= \frac{0,4475 \text{ m}^3}{1000 \text{ s}} \\ &= \frac{0,4475}{1000} \times 1000 \times 60 \\ &= 26,25 \geq q_{max} \end{aligned}$$

We kunnen dus besluiten dat het vat niet goed ontworpen is en het systeem schade zal ondervinden.

2.5.4 Opladen van een condensator

1. differentiaalvergelijking:
$$\begin{cases} u - iR = y \\ i = c \frac{dy}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u - y &= iR \\ \frac{u}{R} - \frac{y}{R} &= i \\ C \frac{dy}{dt} + \frac{y}{R} &= \frac{u}{R} \quad \text{met} \quad y(0^+) = 0 \end{aligned}$$

2. $\tau = RC$ en $K = 1$.

3. oplossing en schets:

$$\begin{aligned} Y(s) &\triangleq \mathcal{L}\{y(t)\} \\ U(s) &\triangleq \mathcal{L}\{u(t)\} \end{aligned}$$

Verder geldt:

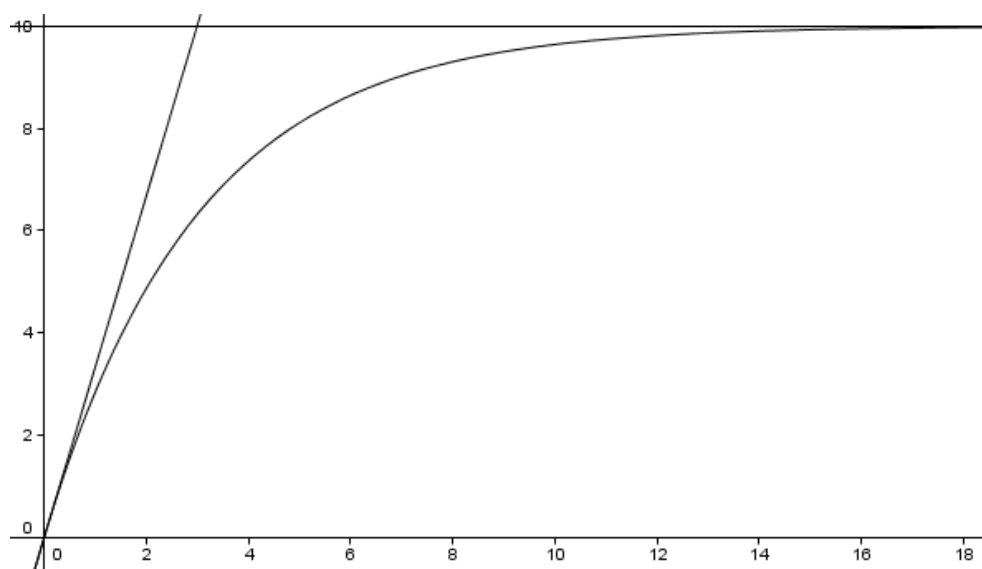
$$\begin{aligned} y(0^+) &= 0 \\ U(s) &= \frac{10}{s} \end{aligned}$$

Laplace transformeren levert:

$$\begin{aligned} RC(sY(s)) + Y(s) &= U(s) \\ Y(s) &= \frac{10}{s(RCs + 1)} = \frac{10}{s} - \frac{10RC}{RCs + 1} \end{aligned}$$

Invers Laplace transformeren levert:

$$y(t) = 10 \left[1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \right]$$



Figuur 2.26: Kwalitatieve schets (met $\tau = 3$).

2.5.5 Radioactiviteit

We weten:

- $v_{\text{verval}} \propto \#$ radioactieve atomen.
- halfwaardetijd = 1 jaar

We vinden de oplossing door de vrije responsie te beschouwen van de volgende differentiaalvergelijking:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -cy \quad \text{met } c > 0 \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} + cy &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{c} \frac{dy}{dt} + y &= 0 \end{aligned}$$

$\tau = \frac{1}{c}$. Omdat we een vrije responsie beschouwen geldt er ook:

$$y(t) = y_0 \exp(-ct)$$

Na 1 jaar is het aantal radioactieve atomen gehalveerd:

$$\begin{aligned}
 y(1) &= \frac{1}{2}y_0 = y_0 \exp(-c) \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{2} &= \exp(-c) \\
 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) &= -c \\
 \Leftrightarrow c &= -\ln\left(\frac{1}{2}\right) \\
 \Leftrightarrow \tau &= \frac{-1}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}
 \end{aligned}$$

Of nog: $\tau = 1,4427$ jaar. Nu bepalen we de tijd die nodig is om het aantal radioactieve atomen te decimeren t.o.v. de beginwaarde:

$$\begin{aligned}
 0,1y_0 &= y_0 \exp\left(t \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\
 \Leftrightarrow 0,1 &= \exp\left(t \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\
 \Leftrightarrow t \ln\left(\frac{1}{2}\right) &= \ln\left(\frac{1}{10}\right) \\
 \Leftrightarrow t &= \frac{\ln\left(\frac{1}{10}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}
 \end{aligned}$$

Dit is 3,3219 jaar.

2.5.6 Cuspical Containers

1. Het opstellen van het eerste-ordemodel: Het verval is de vermindering per eenheid van tijd van de capaciteit, d.i.: $-\delta x$ (waarbij $\delta = \frac{5}{100}$). De expansie is de vermeerdering van het aantal machines per eenheid van tijd:

$$\frac{d}{dt} \left(100 - \frac{t(t+1)}{2} \right) = 50(t+1) + 50t = 100t + 50$$

Het totale model wordt nu:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\delta x + 100t + 50 \\ \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} + \delta x &= 100t + 50 \\ \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{\delta}}_{\tau} \frac{dx}{dt} + x &= \underbrace{\frac{1}{\delta}}_K \underbrace{(100t + 50)}_u\end{aligned}$$

2. De beginvoorwaarde is: $x(0) = 2500 = x_0$. Als we Laplace transformeren krijgen we:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\delta} \frac{dx}{dt} + x\right\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\delta}(100t + 50)\right\} \\ \Leftrightarrow \tau(sX(s) - x_0) + X(s) &= K\left(\frac{100}{s^2} + \frac{50}{s}\right) \\ \Leftrightarrow X(s)(s\tau + 1) &= \tau x_0 + K\left(\frac{100}{s^2} + \frac{50}{s}\right) \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{\tau x_0}{s\tau + 1} + \frac{K}{s\tau + 1}\left(\frac{100}{s^2} + \frac{50}{s}\right)\end{aligned}$$

Nu moeten we splitsen in partieelbreuken:

$$\begin{aligned}\frac{K}{s\tau + 1} \frac{100}{s^2} &= \frac{A}{s\tau + 1} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s^2} \\ &= \frac{As^2 + Bs(s\tau + 1) + C(s\tau + 1)}{(s\tau + 1)ss^2}\end{aligned}$$

Als we de machten van s in linker- en rechterlid gelijk stellen vinden we:

$$\begin{cases} \text{voor } s^2: & A + B\tau = 0 \\ \text{voor } s: & B + C\tau = 0 \\ \text{voor } s^0: & C = 100K \end{cases}$$

Hieruit volgt:

$$\begin{cases} A = 100K\tau^2 \\ B = -100K\tau \\ C = 100K \end{cases}$$

We vinden dus als oplossing:

$$\frac{K}{s\tau + 1} \frac{100}{s^2} = \frac{100K\tau^2}{s\tau + 1} - \frac{100K\tau}{s} + \frac{100K}{s^2}$$

Analoog:

$$\begin{aligned} \frac{K}{s\tau + 1} \frac{50}{s} &= \frac{D}{s\tau + 1} + \frac{E}{s} \\ &= \frac{Ds + E(s\tau + 1)}{s(s\tau + 1)} \end{aligned}$$

Als we de machten van s in linker- en rechterlid gelijk stellen vinden we:

$$\begin{cases} \text{voor } s : & D + E\tau = 0 \\ \text{voor } s^0 : & E = 50K \end{cases}$$

Hieruit volgt:

$$\begin{cases} D = -50K\tau \\ E = 50K \end{cases}$$

We vinden dus als oplossing:

$$\frac{K}{s\tau + 1} \frac{50}{s} = \frac{-50K\tau}{s\tau + 1} + \frac{50k}{s}$$

Voor de totale responsie in het Laplace domein vinden we dus:

$$X(s) = \underbrace{\frac{\tau x_0}{s\tau + 1}}_{\text{vrijeresponsie}} + \underbrace{\frac{-50K\tau}{s\tau + 1} + \frac{50k}{s} + \frac{100K\tau^2}{s\tau + 1} - \frac{100K\tau}{s} + \frac{100K}{s^2}}_{\text{gedwongenresponsie}}$$

Inverse Laplace transformatie levert:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right\} - 50K \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right\} + 50K \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} + 100K\tau \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right\} \\ &\quad - 100K\tau \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} + 100K \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} \\ &= x_0 \exp \left(\frac{-t}{\tau} \right) - 50K \exp \left(\frac{-t}{\tau} \right) + 50K + 100K\tau \exp \left(\frac{-t}{\tau} \right) - 100K\tau + 100Kt \\ &= x_0 \exp \left(\frac{-t}{\tau} \right) + 100Kt - 100K\tau + 100K\tau \exp \left(\frac{-t}{\tau} \right) + 50K \left[1 - \exp \left(\frac{-t}{\tau} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\text{Met } x_0 = 2500, K = \frac{100}{5} = \tau = 20$$

3. Een verkeerde inschatting van δ geeft een verkeerde waarde voor zowel de tijdsconstante als de versterkingsfactor. Dit heeft effect op de snelheid van het verval alsook op de factor waarmee de ingang (dit is het expansiebeleid) wordt vermenigvuldigd.

2.5.7 Appels

P is de concentratie aan pesticiden.

1. Het model is van eerste orde en vertoont een verval $-\delta P$ en een constante ingang αA . De differentiaalvergelijking wordt:

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= -\delta P + \alpha A \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\delta} \frac{dP}{dt} + P &= \frac{\alpha}{\delta} A\end{aligned}$$

2. Laplace transformeren levert:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\delta} \frac{dP}{dt} + P\right\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{\alpha A}{\delta}\right\} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\delta} (sP(s)) + P(s) &= \frac{\alpha A}{\delta} \frac{1}{s} \\ \Leftrightarrow \left(1 + \frac{s}{\delta}\right) P(s) &= \frac{\alpha A}{\delta} \frac{1}{s} \\ \Leftrightarrow P(s) &= \frac{\alpha A}{s + \delta} \frac{1}{s}\end{aligned}$$

Splitzen in partieelbreuken levert:

$$\begin{aligned}\frac{1}{s + \delta} \frac{\alpha A}{s} &= \frac{B}{s} + \frac{C}{s + \delta} \\ &= \frac{B(s + \delta) + Cs}{s(s + \delta)}\end{aligned}$$

Gelijkstellen van de coëfficiënten voor verschillende machten van s levert:

$$\begin{cases} B + C = 0 \\ B\delta = \alpha A \end{cases}$$

Dit levert ons: $B = \frac{\alpha A}{\delta}$ en $C = -\frac{\alpha A}{\delta}$ Invers Laplace transformeren geeft:

$$\begin{aligned} p(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\frac{\alpha A}{\delta}}{s} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-\frac{\alpha A}{\delta}}{s + \delta} \right\} \\ &= \frac{\alpha A}{\delta} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - \frac{\alpha A}{\delta} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + \delta} \right\} \\ &= \frac{\alpha A}{\delta} [1 - \exp(-t\delta)] \end{aligned}$$

Dit met $0 \leq t \leq 365 \times 19$.

3. Na voldoende lange tijd is het overgangsverschijnsel uitgewerkt en zal het systeem de regimewaarde aannemen. Dus zal er gelden: $P(t) \approx \frac{\alpha A}{\delta}$.
4. Indien er geen appels meet worden gegeten geldt: $\sigma = \alpha A = 0$. We beschouwen dus enkel de vrije responsie van het systeem:

$$P(t) = P_0 \exp(-\delta t)$$

De halfwaardetijd is 50 dagen, zodat:

$$\begin{aligned} \exp(-50\delta) &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow -50\delta &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ \Leftrightarrow \delta &= -\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{50} = 0,0139 \end{aligned}$$

De tijd t_2 die nodig is om de initiële concentratie terug te brengen tot $0,1 \times P_0$ bedraagt:

$$t_2 = -\ln(0,1) \frac{1}{0,0139} = 166,0964 \text{ dagen}$$

2.5.8 Accumulatorvat

We bepalen eerst de modelvergelijking van het hydraulisch systeem:

$$\frac{d}{dt}(Ah) = q_{in} - q_{uit}$$

Nu moeten we nog q_{uit} bepalen:

$$\begin{aligned}\hat{R}q_{uit} &= \rho gh + p_{atm} - p_{atm} \\ \Leftrightarrow q_{uit} &= \frac{\rho gh}{\hat{R}} \quad \text{stel: } R = \frac{\hat{R}}{\rho g} \\ \Leftrightarrow q_{uit} &= \frac{h}{R}\end{aligned}$$

De differentiaalvergelijking in standaardvorm is dus:

$$AR \frac{dh}{dt} + h = Rq_{in}$$

met $RA = 10 \times 0,05 \text{ s} = 0,5 \text{ s}$.

1. Als het vat initieel vol is en we laten het leeglopen hebben we te maken met een vrije responsie:

$$AR \frac{dh}{dt} + h = 0$$

Laplace transformeren levert:

$$\begin{aligned}AR(H(s) - h_0) + H(s) &= 0 \\ H(s)(1 + AR) &= h_0 \\ H(s) &= \frac{h_0}{1 + AR}\end{aligned}$$

Inverse Laplace transformatie levert:

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{h_0}{1 + AR}\right\} = h_0 \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$$

Verder weten we dat $h_0 = 10 \text{ m}$. Er geldt dus:

$$h(t) = 10 \exp\left(\frac{-t}{0,5}\right)$$

De tijd die nodig is om 10 cm te zakken noemen we t_1 . Op t_1 is $h = 9,9 \text{ m}$. We vinden nu:

$$\begin{aligned}10 \exp\left(\frac{-t_1}{0,5}\right) &= 9,9 \\ \Leftrightarrow \frac{-t_1}{0,5} &= \ln\left(\frac{9,9}{10}\right) \\ \Leftrightarrow t_1 &= -0,5 \ln\left(\frac{9,9}{10}\right) = 0,00503 \text{ s}\end{aligned}$$

2. Er is evenwicht als $q_{uit} = q_{in}$. Voor een hoogte van 5 m geldt:

$$q_{uit} = \frac{5}{10} \frac{m^3}{s} = q_{in}$$

Hoofdstuk 3

Tweede-ordedynamica

3.1 Stapantwoord

De modelvergelijking van een tweede-ordesysteem bevat de tweede-orde afgeleide van de onbekende functie als hoogste afgeleide. We werken opnieuw met een standaarduitdrukking:

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = K\omega_n^2 u \quad (3.1)$$

De factor ζ wordt de dempingsfactor genoemd, ω_n de ongedempte natuurlijke frequentie en K de statische versterkingsfactor. ζ is dimensieloos, ω_n heeft de dimensie van radialen per seconde en is dus een hoekfrequentie. De dimensie van K zorgt ervoor dat $K\omega_n^2 u$ dezelfde dimensie heeft als y . De parameters ζ en ω_n karakteriseren de responsie van het tweede-ordesysteem. Na Laplace transformatie van (3.1) vinden we:

$$s^2 Y(s) - sy_0 - \dot{y}_0 + 2\zeta\omega_n s Y(s) - 2\zeta\omega_n y_0 + \omega_n^2 Y(s) = K\omega_n^2 U(s)$$

of na herschikken:

$$\begin{aligned} Y(s)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) &= (s + 2\zeta\omega_n)y_0 + \dot{y}_0 + K\omega_n^2 U(s) \\ \Leftrightarrow Y(s) &= \underbrace{\frac{(s + 2\zeta\omega_n)y_0 + \dot{y}_0}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}}_{G_0(s)} + \underbrace{\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}}_{G(s)} U(s) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Daarbij stellen y_0 en $\dot{y}_0$ de beginvoorwaarden voor:

$$\begin{aligned} y_0 &= y(0) \\ \dot{y}_0 &= \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} \end{aligned}$$

De responsie valt opnieuw uiteen in de vrije responsie

$$y_{in} \triangleq \mathcal{L}^{-1} \{G_0(s)\}$$

die afhankelijk is van de beginvoorwaarden en de gedwongen responsie

$$y_f(t) \triangleq \mathcal{L}^{-1} \{G(s)U(s)\}$$

die afhankelijk is van de ingang.

Vrije responsie

We berekenen de vrije responsie via de inverse Laplace transformatie van $G_0(s)$. Hiertoe moeten we $G_0(s)$ splitsen in partieelbreuken. Het resultaat hiervan

- 2 reële wortels
- 1 dubbele reële wortel
- 2 complex toegevoegde wortels

zal afhangen van de noemer van $G_0(s)$. We bekijken dus de wortels λ_i , $i = 1, 2$ van de vergelijking:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

De discriminant van deze vierkantsvergelijking is:

$$\begin{aligned} D &= (2\zeta\omega_n)^2 - (4\omega_n^2) \\ &= 4\omega_n^2(\zeta^2 - 1) \end{aligned}$$

De wortels hebben dus als uitdrukking:

$$\begin{aligned}\lambda_i &= \frac{-2\zeta\omega_n \pm 2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}{2} \\ &= -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad ; \quad i = 1, 2\end{aligned}\quad (3.3)$$

De aard van λ_1 en λ_2 hangt af van de waarde van de dempingsfactor ζ . We onderscheiden drie gevallen.

1. In het geval $\zeta > 1$ spreken we van een overgedempt systeem. De wortels λ_1 en λ_2 zijn reëel. We kunnen de noemer dan als volgt ontbinden in factoren:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)$$

We kunnen $G_0(s)$ als volgt splitsen:

$$\begin{aligned}G_0(s) &= \frac{y_0(s + 2\zeta\omega_n) + \dot{y}_0}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{A}{s - \lambda_1} + \frac{B}{s - \lambda_2} \\ &= \frac{A(s - \lambda_2) + B(s - \lambda_1)}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}\end{aligned}$$

Hieruit halen we volgend stelsel van vergelijkingen:

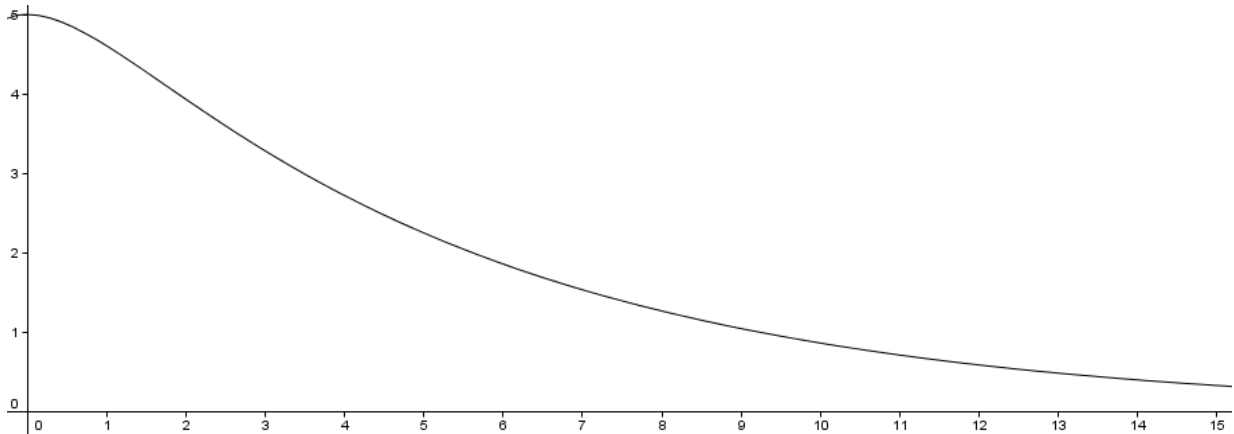
$$\begin{aligned}\begin{cases} A + B = y_0 \\ -A\lambda_2 - B\lambda_1 = 2\zeta\omega_n y_0 + \dot{y}_0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} B = y_0 - A \\ -A\lambda_2 + (A - y_0)\lambda_1 = 2\zeta\omega_n y_0 + \dot{y}_0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} B = y_0 - A \\ A(\lambda_1 - \lambda_2) = 2\zeta\omega_n y_0 + \dot{y}_0 + y_0\lambda_1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} B = y_0 + \frac{y_0(\lambda_1 + 2\zeta\omega_n + \dot{y}_0)}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \\ = \frac{y_0(\lambda_2 + 2\zeta\omega_n) + \dot{y}_0}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \\ A = \frac{y_0(\lambda_1 + 2\zeta\omega_n + \dot{y}_0)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \end{cases}\end{aligned}$$

Inverse Laplace transformatie levert:

$$\mathcal{L}^{-1}\{G_0(s)\} = A\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - \lambda_1}\right\} + B\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - \lambda_2}\right\}$$

De vrije responsie is dus de som van twee dalende exponentiëlen (Figuur 3.1):

$$y_{in} = A \exp(\lambda_1 t) + B \exp(\lambda_2 t)$$



Figuur 3.1: Overgedempt systeem $\zeta = 1.5$, $\omega_n = 0.5$, $y_0 = 5$

2. Een kritisch gedempt systeem is een systeem waarvoor $\zeta = 1$. De noemer van $G_0(s)$ bevat een dubbele reële wortel $\lambda = -\omega_n$. De ontbinding is als volgt:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = (s + \omega_n)(s + \omega_n) = (s + \omega_n)^2$$

$G_0(s)$ kunnen we schrijven als:

$$\begin{aligned} G_0(s) &= \frac{y_0(s + 2\omega_n) + \dot{y}_0}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{A}{s + \omega_n} + \frac{B}{(s + \omega_n)^2} \\ &= \frac{A(s + \omega_n) + B}{(s + \omega_n)^2} \end{aligned}$$

Dit levert ons het volgende stelsel:

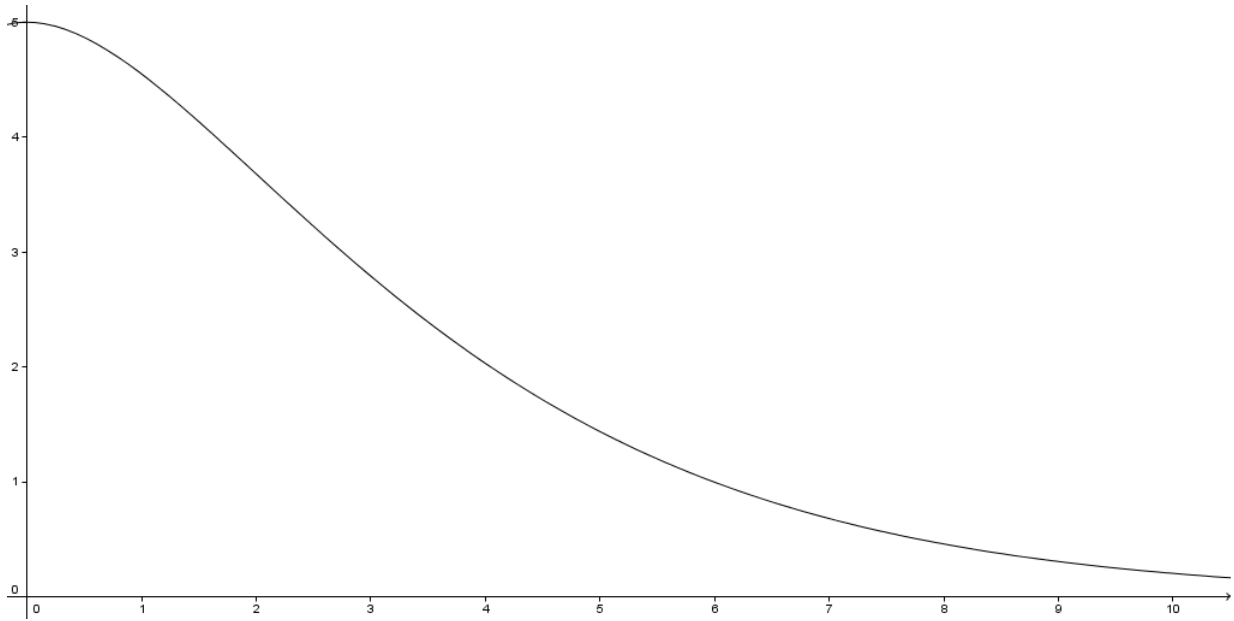
$$\begin{cases} A = y_0 \\ \omega_n A + B = 2\omega_n y_0 + \dot{y}_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = y_0 \\ B = \omega_n y_0 + \dot{y}_0 \end{cases}$$

Inverse Laplace transformatie levert:

$$\mathcal{L}^{-1}\{G_0(s)\} = A\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + \omega_n}\right\} + B\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + \omega_n)^2}\right\}$$

De vrije responsie (Figuur 3.2) is dus:

$$y_{in} = A \exp(-\omega_n t) + Bt \exp(-\omega_n t)$$



Figuur 3.2: Vrije responsie van een kritisch gedempt systeem met $\zeta = 1$, $\omega_n = 0.5$, $y_0 = 5$ en $\dot{y}_0 = 0$.

3. Een systeem is ondergedempt als $0 < \zeta < 1$. De wortels λ_1 en λ_2 zijn complex toegevoegd. $G_0(s)$ kan niet verder gesplitst worden en inverteren we rechtstreeks door volgende herschikking:

$$G_0(s) = \frac{y_0(s + 2\zeta\omega_n) + \dot{y}_0}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{y_0(s + \zeta\omega_n) + \dot{y}_0}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{\zeta\omega_n y_0}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Nu herschrijven we nog de noemer van deze uitdrukking:

$$\begin{aligned} s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 &= (s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2 - \zeta^2\omega_n^2 \\ &= (s + \zeta\omega_n)^2 + \underbrace{\omega_n^2(1 - \zeta^2)}_{\omega_p^2} \end{aligned}$$

De frequentie

$$\omega_p \triangleq \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

noemen we de **gedempte natuurlijke frequentie** van het systeem. Nu is:

$$G_0(s) = y_0 \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_p^2} + \frac{\dot{y}_0 + \zeta\omega_n y_0}{\omega_p} \frac{\omega_p}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_p^2}$$

Inverse Laplace transformatie levert:

$$\mathcal{L}^{-1}\{G_0(s)\} = y_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_p^2}\right\} + \frac{\dot{y}_0 + \zeta\omega_n y_0}{\omega_p} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega_p}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_p^2}\right\}$$

we krijgen dus:

$$\begin{aligned} y_{in}(t) &= y_0 \exp(-\zeta\omega_n t) \cos(\omega_p t) + \frac{\dot{y}_0 + \zeta\omega_n y_0}{\omega_p} \exp(-\zeta\omega_n t) \sin(\omega_p t) \\ &= \exp(-\zeta\omega_n t) \left[y_0 \cos(\omega_p t) + \frac{\dot{y}_0 + \zeta\omega_n y_0}{\omega_p} \sin(\omega_p t) \right] \end{aligned}$$

Dit stelt een exponentieel uitstervende trilling voor (Figuur ??):

$$y_{in} = a \exp(-\zeta\omega_n t) \sin(\omega_p t + \phi) \quad (3.4)$$

Nu bepalen we de amplitude a en de faze ϕ van deze exponentieel uitstervende trilling.

$$y_0 \cos(\omega_p t) + \frac{\dot{y}_0 + \zeta\omega_n y_0}{\omega_p} \sin(\omega_p t)$$

herschrijven we als:

$$\begin{aligned} &\sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0 + \zeta\omega_n y_0}{\omega_p}\right)^2} \left(\frac{\frac{\dot{y}_0 + \zeta\omega_n y_0}{\omega_p}}{\sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0 + \zeta\omega_n y_0}{\omega_p}\right)^2}} \sin(\omega_p t) + \frac{y_0}{\sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0 + \zeta\omega_n y_0}{\omega_p}\right)^2}} \cos(\omega_p t) \right) \\ &\left(\frac{\frac{\dot{y}_0 + \zeta\omega_n y_0}{\omega_p}}{\sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0 + \zeta\omega_n y_0}{\omega_p}\right)^2}}, \frac{y_0}{\sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0 + \zeta\omega_n y_0}{\omega_p}\right)^2}} \right) \end{aligned}$$

is een punt op de goniometrische cirkel: er bestaat dus juist één $\phi \in [0; 2\pi[$ zodat:

$$\cos(\phi) = \frac{\dot{y}_0 + \zeta\omega_n y_0}{\omega_p \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0 + \zeta\omega_n y_0}{\omega_p}\right)^2}}$$

en

$$\sin(\phi) = \frac{y_0}{\sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0 + \zeta\omega_n y_0}{\omega_p}\right)^2}}$$

Nu geldt:

$$\tan(\phi) = \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} = \frac{y_0 \omega_p}{\dot{y}_0 + \zeta\omega_n y_0}$$

Hieruit besluiten we:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0 + \zeta \omega_n y_0}{\omega_p} \right)^2} \\ \phi &= \arctan \left(\frac{y_0 \omega_p}{\dot{y}_0 + \zeta \omega_n y_0} \right) \end{aligned}$$

Het verval van een ondergedempte responsie kan gekenmerkt worden door het logaritmisch decrement Λ . Dit is het natuurlijk logaritme van de verhouding van twee opeenvolgende willekeurige amplitudes in dezelfde zin, d.i. twee amplitudes verschoven over één periode (bijvoorbeeld X_1 en X_2 op Figuur ??).

$$\Lambda = \ln \left(\frac{X_1}{X_2} \right)$$

met

$$\begin{aligned} X_1 &= \exp(-\zeta \omega_n t_1) A \sin(\omega_p t_1 + \phi) \\ X_2 &= \exp[-\zeta \omega_n (t_1 + T_p)] A \sin(\omega_p (t_1 + T_p) + \phi) \end{aligned}$$

we vinden:

$$\Lambda = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3.5)$$

In het speciale geval van een model zonder demping $\left(c = \zeta = 0, \text{ dus } \omega_p = \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \right)$ is

$$y_{in} = y_0 \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{y}_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \quad (3.6)$$

Dit is een sinusoidale trilling (Figuur ??)

$$y_{in} = a \sin(\omega_n t + \phi)$$

We bepalen opnieuw de amplitude a en de faze ϕ . Vergelijking (3.6) kunnen we herschrijven als:

$$y_{in} = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega_n} \right)^2} \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega_n \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega_n} \right)^2}} \sin(\omega_n t) + \frac{y_0}{\sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega_n} \right)^2}} \cos(\omega_n t) \right)$$

$$\left(\frac{\dot{y}_0}{\omega_n \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega_n}\right)^2}}, \frac{y_0}{\sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega_n}\right)^2}} \right)$$

is een punt op de goniometrische cirkel. Er bestaat dus juist één $\phi \in [0, 2\phi[$ zodat:

$$\begin{aligned} \cos(\phi) &= \frac{\dot{y}_0}{\omega_n \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega_n}\right)^2}} \\ \sin(\phi) &= \frac{y_0}{\sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega_n}\right)^2}} \end{aligned}$$

en

$$\tan(\phi) = \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} = \frac{y_0 \omega_n}{\dot{y}_0}$$

We kunnen dus besluiten:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega_n}\right)^2} \\ \phi &= \arctan\left(\frac{y_0 \omega_n}{\dot{y}_0}\right) \end{aligned}$$

Gedwongen responsie

We beschouwen de stapresponsie van het tweede-ordesysteem, d.i.:

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

en

$$y_f = \mathcal{L}^{-1}\left(G(s)\frac{1}{s}\right)$$

De manier waarop de gedwongen responsie een regime waarde bereikt wordt opnieuw sterk beïnvloed door de dempingsfactor. De noemer van $G(s)$ heeft dezelfde wortels λ_1 en λ_2 als $G_0(s)$.

1. Als eerste beschouwen we een overgedempt systeem, d.i. $\zeta > 1$. We splitsen $G(s)\frac{1}{s}$

op in partieelbreuken.

$$\begin{aligned}
 G(s) \frac{1}{s} &= \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s} = \frac{K\omega_n^2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)} \frac{1}{s} \\
 &= \frac{A}{s - \lambda_1} + \frac{B}{s - \lambda_2} + \frac{C}{s} \\
 &= \frac{As(s - \lambda_2) + Bs(s - \lambda_1) + C(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}{s(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}
 \end{aligned}$$

De constanten A , B en C volgen uit het stelsel:

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ -\lambda_2 A - \lambda_1 B - (\lambda_1 + \lambda_2)C = 0 \\ \lambda_1 \lambda_2 = K\omega_n^2 \end{cases}$$

en hebben als uitdrukking

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\lambda_2 K}{\lambda_1 - \lambda_2} \\
 B &= \frac{\lambda_1 K}{\lambda_2 - \lambda_1} \\
 C &= K
 \end{aligned}$$

Inverse Laplace transformatie levert:

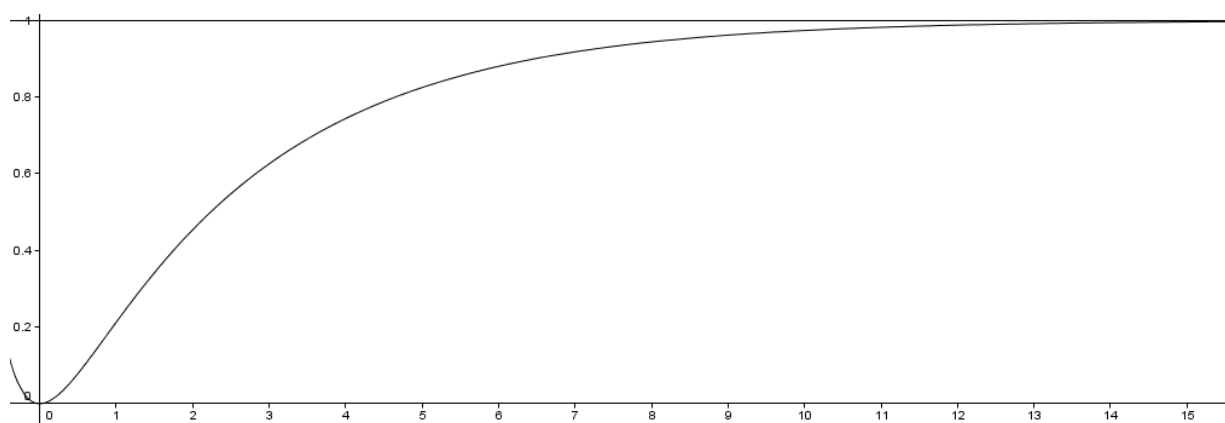
$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s} \right\} = \frac{\lambda_2 K}{\lambda_1 - \lambda_2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s - \lambda_1} \right\} + \frac{\lambda_1 K}{\lambda_2 - \lambda_1} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s - \lambda_2} \right\} + K \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\}$$

De gedwongen responsie heeft dus als uitdrukking:

$$y_f(t) = K \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \exp(\lambda_1 t) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \exp(\lambda_2 t) + 1 \right]$$

2. Voor het kritisch gedempt systeem ($\zeta = 1$) werken we op een analoge manier:

$$\begin{aligned}
 G(s) \frac{1}{s} &= \frac{K\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2} \frac{1}{s} = \frac{A}{s + \omega_n} + \frac{B}{(s + \omega_n)^2} + \frac{C}{s} \\
 &= \frac{A(s + \omega_n)s + Bs + C(s + \omega_n)^2}{(s + \omega_n)^2 s}
 \end{aligned}$$



Figuur 3.3: Stapantwoord van een overgedempt tweede-ordesysteem, $\zeta = 1.5$, $\omega_n = 1$.

De constanten A , B en C volgen uit het stelsel:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ \omega_n A + B + 2\omega_n C = 0 \\ \omega_n^2 C = K\omega_n^2 \end{cases}$$

en hebben als uitdrukking

$$\begin{aligned} A &= -K \\ B &= -\omega_n K \\ C &= K \end{aligned}$$

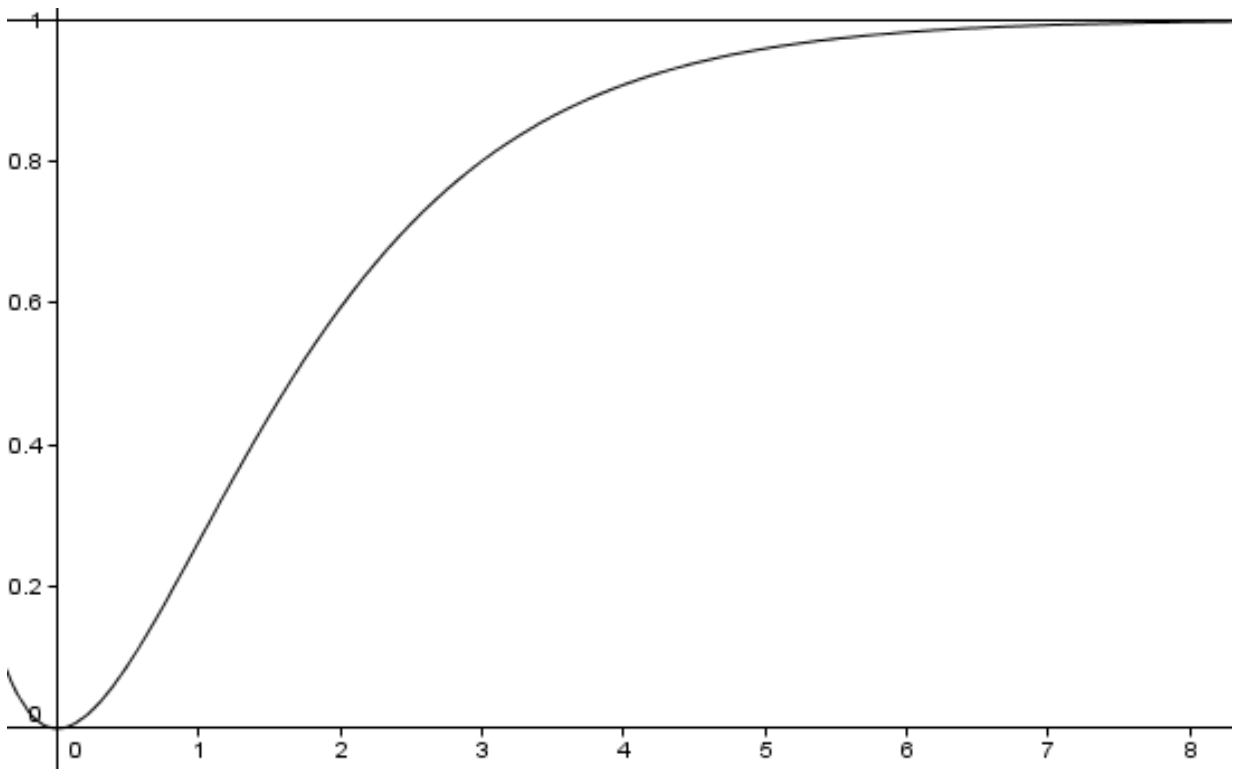
Invers Laplace transformeren levert:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ G(s) \frac{1}{s} \right\} = -K \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + \omega_n} \right\} - \omega_n K \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \omega_n)^2} \right\} + K \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\}$$

De gedwongen responsie heeft als uitdrukking:

$$y_f(t) = K [-\exp(-\omega_n t) - \omega_n t \exp(-\omega_n t) + 1]$$

Figuur 3.4 toont de responsie voor een kritisch gedempt systeem.



Figuur 3.4: Stapantwoord van een kritisch gedempt tweede-ordesysteem, $\zeta = 1$, $\omega_n = 1$.

3. Als laatste beschouwen we een ondergedempt tweede-ordesysteem ($\zeta < 1$). De wortels van de noemer van $G(s)$ zijn complex toegevoegd. We gaan op volgende manier tewerk:

$$\begin{aligned}
 G(s)\frac{1}{s} &= \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s} \\
 &= \frac{As + B}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{C}{s} \\
 &= \frac{(As + B)s + C(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}
 \end{aligned}$$

Gelijkstellen van de coëfficiënten van de verschillende machten van s levert:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + 2\zeta\omega_n C = 0 \\ C\omega_n^2 = K\omega_n^2 \end{cases}$$

of

$$A = -K$$

$$B = -2\zeta\omega_n K$$

$$C = K$$

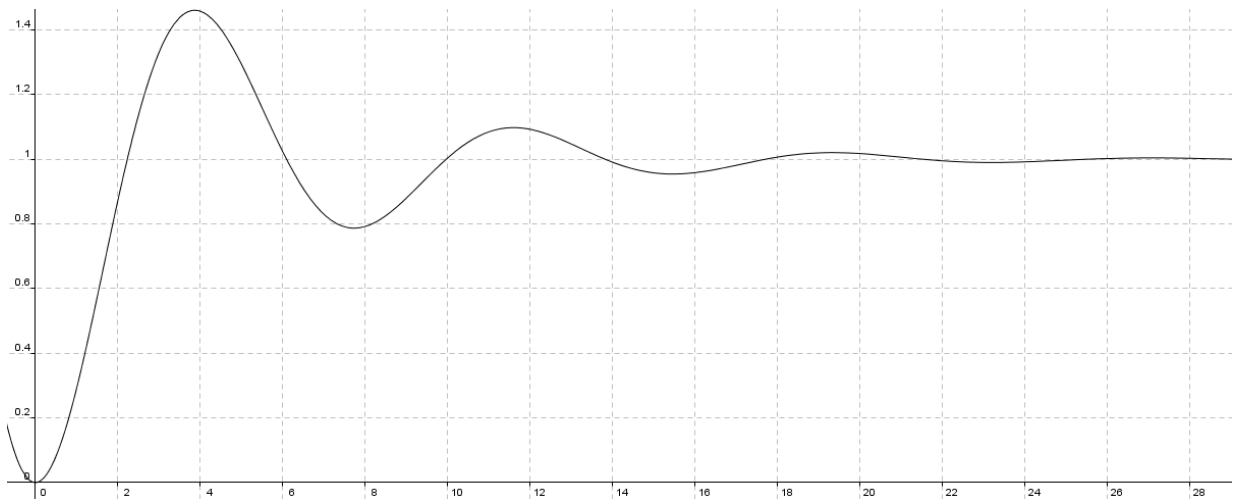
Inverse Laplace transformatie levert:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ G(s) \frac{1}{s} \right\} = -K \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_p^2} \right\} + \frac{\zeta\omega_n}{\omega_p} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_p}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_p^2} \right\} + K \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\}$$

De stapresponsie neemt dus de volgende vorm aan:

$$y_f(t) = K \left[1 - \exp(-\zeta\omega_n t) \left(\cos(\omega_p t) + \frac{\zeta\omega_n}{\omega_p} \sin(\omega_p t) \right) \right]$$

Figuur 3.5 toont het stapantwoord.



Figuur 3.5: Stapantwoord van een ondergedempt tweede-ordesysteem, $\zeta = 0.2$, $\omega_n = 1$.

De totale responsie is de som van de vrije responsie en de gedwongen responsie. We zien dat in elk van de gevallen de vrije responsie steeds uitsterft voor voldoende grote t . De gedwongen responsie bevat eveneens exponentieel uitstervende termen voor toenemende tijd. Het gedeelte van de responsie dat verdwijnt voor toenemende tijd is het overdrachtsverschijnsel. Er stelt zich voor het geval van een stapingang een constant regime in.

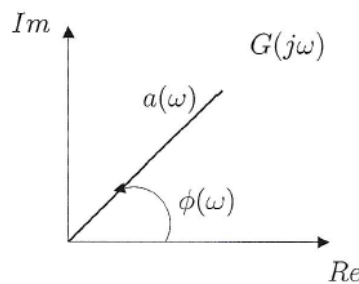
3.2 Sinusregime

In deze sectie onderzoeken we het systeemantwoord in regime op een sinusoidale belasting:

$$u(t) = 0 \quad t < 0 \quad (3.7)$$

$$= u_0 \sin(\omega t) \quad t \geq 0 \quad (3.8)$$

De pulsatie of hoekfrequentie ω wordt uitgedrukt in rad/s, de frequentie $f = \frac{\omega}{2\pi}$ wordt uitgedrukt in Hz (1/s). De responsie van een lineair systeem op dergelijke $u(t)$ bezit volgende belangrijke eigenschap: in regime toestand; d.i. na het uitsterven van het overgangsverschijnsel; is de responsie (= uitgang) van een lineair systeem op een sinusoidale ingang met frequentie (pulstaie $2\pi f$) eveneens sinusoidaal, met dezelfde frequentie, doch met een andere amplitude en met een andere fasehoek. De amplitudeverhouding of amplitudeversterking (AV), d.i. de uitgangsamplitude/ingangsamplitude, is enkel functie van de frequentie f . De faseverschuiving (FV), uitgangsfase-ingangsfase, is eveneens enkel een functie van de frequentie f . De amplitudeversterking en de faseverschuiving vinden we met behulp van de overdrachtsfunctie $G(s)$. We vervangen de complexe veranderlijke s door $j\omega$ met j de imaginaire eenheid en ω de aandrijfpulsatie. $G(j\omega)$ is een complex getal met modulus $a(\omega)$ en fase $\phi(\omega)$, zoals aangeduid op Figuur 3.6. $G(j\omega)$ wordt de frequentieresponsie genoemd. Er geldt:



Figuur 3.6: Complex getal $G(j\omega)$.

$$AV = a(\omega) = |G(j\omega)|$$

$$FV = \phi(\omega) = \arg G(j\omega)$$

Bij een sinusoidale belasting

$$\begin{aligned} u(t) &= 0 & t < 0 \\ &= u_0 \sin(\omega t) & t \geq 0 \end{aligned}$$

ontstaat na het uitstervan van de beginvoorwaarden een sinusoidaal regime

$$y_{reg}(t) = a(\omega)u_0 \sin[\omega t + \phi(\omega)]$$

Vaak worden de grootheden $|G(j\omega)|$ en $\arg G(j\omega)$ voor verschillende frequenties in een zgn. Bodediagram getekend waarbij de frequentie ω varieert van 0 tot $+\infty$ op een logaritmische schaal. Een logaritmische schaal laat toe dergelijk groot frequentiebereik voor te stellen op 1 blad. De amplitudeversterking wordt meestal uitgedrukt in decibel, d.i. $20 \log |G(j\omega)|$. Tabel 3.1 toont een aantal waarden. Het Bodediagram karakteriseert een lineair systeem

$ G(j\omega) $	0.01	0.1	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2	10	100
$20 \log G(j\omega) $	-40 dB	-20 dB	-6 dB	-3 dB	0 dB	3 dB	6 dB	20 dB	40 dB

Tabel 3.1: Amplitudeverhouding in dB.

in het frequentiedomein zoals het stapantwoord dit doet in het tijdsdomein. De frequentieresponsie van het **tweede-ordesysteem** wordt net zoals de stapresponsie sterk beïnvloed door de waarde van de dempingsfactor. De amplitudeversterking en faseverschuiving vinden we uit:

$$G(j\omega) = \frac{K\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2\zeta\omega_n j\omega}$$

Er geldt:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= \frac{K\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}} = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} \\ \arg G(j\omega) &= -\arctan\left(\frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}\right) = -\arctan\left(\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right) \end{aligned}$$

We beginnen met de amplitudeversterking (uitgedrukt in dB) t.o.v. de frequentie.

- Voor lage frequenties ($\omega \rightarrow 0$) wordt de amplitudeversterking

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log(K)$$

- Voor hoge frequenties ($\omega \rightarrow +\infty$) vinden we

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log(K) - 20 \log \left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) = 20 \log(K) - 40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)$$

Dit is een rechte met helling $-40dB$ per decade.

Beide asymptoten snijden elkaar in $\omega = \omega_n$. De fout t.o.v. de werkelijke Bodeplot kan groot zijn afhankelijk van de dempingsfactor. De amplitudeversterking in de omgeving $\omega = \omega_n$ hangt sterk af van de dempingsfactor zoals Figuur 3.7 illustreert. Voor de faseverschuiving gaan we analoog te werk:

- Voor lage frequenties ($\omega \rightarrow 0$) wordt de faseverschuiving

$$\arg(G(j\omega)) = 0^\circ$$

Wat een constante is en dus overeenstemt met een horizontale.

- Voor hoge frequenties ($\omega \rightarrow +\infty$) vinden we

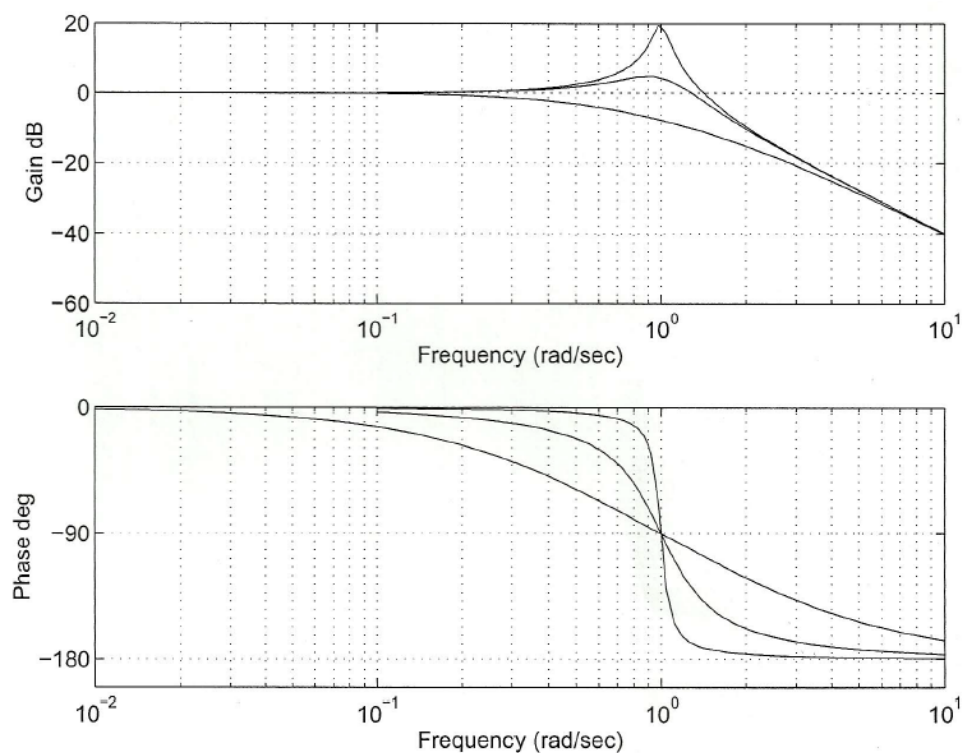
$$\arg(G(j\omega)) = -180^\circ$$

wat opnieuw overeenstemt met een horizontale.

Ook bij de fasekarakteristiek is een correctie nodig rond de frequentie $\omega = \omega_n$, meer bepaald in het gebied $0.1\omega_n < \omega < 10\omega_n$ zoals Figuur 3.7 illustreert. Voor $\omega = \omega_n$ is de fasenaijling 90° , onafhankelijk van de dempingsfactor.

De frequentie ω_r waarbij $a(\omega)$ een maximum bereikt noemen we de **resonantiefrequentie**. De overeenstemmende waarde van de amplitudeversterking noemen we de resonantiepiek. We maximaliseren

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4\zeta^2 u^2}}$$



Figuur 3.7: Bodediagram van een tweede-ordesysteem, $\omega_n = 1$, $\zeta = 0.03$, $\zeta = 0.5$, $\zeta = 1.2$.

met

$$\frac{\omega}{\omega_n} = u$$

Resonantie treedt op voor

$$2(1 - u^2)(-2u) + 8\zeta^2 u = 0$$

$$-1 + u^2 + 2\zeta^2 = 0$$

$$u = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

of

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

Resonantie doet zich voor van zodra $\zeta^2 < \frac{1}{2}$, of $\zeta < \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$. De resonantiepiek is gegeven door

$$\begin{aligned} a_{max} &= \frac{K}{\sqrt{[1 - (1 - 2\zeta^2)]^2 + 4\zeta^2(1 - 2\zeta^2)}} \\ &= \frac{K}{\sqrt{4\zeta^4 + 4\zeta^2 - 8\zeta^4}} = \frac{K}{\sqrt{4\zeta^2 - 4\zeta^4}} \end{aligned}$$

Verder geldt:

1. Als $\zeta \rightarrow 0$ dan wordt de maximale versterking van de amplitude oneindig groot. Wanneer men een ongedemt systeem sinusoidaal belast bij de resonantiefrequentie dan ontstaat er geen sinusregime. De oscillatieamplitude groeit in theorie onbeperkt aan.
2. Wanneer met een ongedempt systeem sinusoidaal belast bij een frequentie $\omega < \omega_n$, dan is $\phi = 0$. Ingang en uitgang zijn dus in fase. Voor $\omega > \omega_n$ is $\phi = -\pi$. Nu zijn ingang en uitgang in tegenfase.
3. Indien de demping klein is geldt bij benadering

$$\omega_r \approx \omega_n$$

en

$$\frac{a_{max}}{a_{stat}} \approx \frac{1}{2\zeta} \quad a_{stat} = K$$

3.3 Toepassingen: mechanische systemen

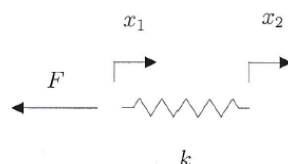
3.3.1 Inleiding

We willen begrijpen hoe een gebouw beweegt ten gevolge van een windstoot. We wensen na te gaan of de schokdemper van een auto volstaat om comfortabel over een ruw wegdek te rijden. Daartoe moeten we de dynamica van mechanische systemen bestuderen. Er zijn 3 fundamentele elementen aanwezig in een mechanisch systeem: traagheid, vervorming en

wrijving. Dit stellen we voor door massa's, veren en dempers. We beperken ons tot één-dimensionale systemen. Dit houdt in dat een positie uitgedrukt wordt m.b.v. een scalair i.p.v. een vector. We bekijken enkel translatiesystemen. We bestuderen de drie elementen i.e. massa's, veren en dempers, in detail.

3.3.2 De veer

Een veer stelt de elasticiteit van het systeem voor. We beschouwen ééndimensionele veren die massaloos en wrijvingsloos zijn. Symbolisch gebruikt men meestal een helicoïdaal opgewonden draad die zeer elastisch is in de richting van de langsas, schematisch voorgesteld op Figuur 3.8. x_1 en x_2 zijn de verplaatsingen van de uiteinden relatief t.o.v. de onvervormde



Figuur 3.8: Veer.

toestand. De veer geeft een functioneel verband tussen de relatieve vervorming van de twee uiteinden t.o.v. elkaar en de veerkracht. We beschouwen enkel lineaire veren zodat het verband proportioneel is. De kracht F uitgeoefend op het eindpunt met verplaatsing x_1 wordt gegeven door de wet van Hooke:

$$F = k(x_1 - x_2) \quad (3.9)$$

De evenredigheidsconstante noemen we de veerconstante, uitgedrukt in N/m. De kracht F plant zich ongewijzigd voort doorheen de veer. Algemeen geldt dat de kracht F die de veer uitoefent op een eindpunt gegeven wordt door

$$F = k(x_{\text{dicht}} - x_{\text{ver}})$$

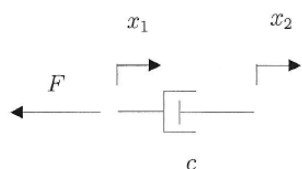
met x_{dicht} het eindpunt waarvoor we F berekenen en x_{ver} het andere eindpunt. De kracht F werkt steeds de vervorming tegen en heeft de tegengestelde zin van de verplaatsing.

3.3.3 De demper

De beweging van een massa neemt af in amplitude t.g.v. energiedissipatie. Het mechanisme dat hiervoor verantwoordelijk is noemen we damping. We beperken ons tot viskeuze damping waarbij de demper een kracht genereert die evenredig is met de relatieve snelheid van de twee uiteinden t.o.v. elkaar. Figuur 3.9 toont de schematische voorstelling van een demper. Voor een eindpunt met een verplaatsing x_1 heeft de dempingskracht in het lineaire geval de uitdrukking

$$F = c(\dot{x}_{\text{dicht}} - \dot{x}_{\text{ver}}) = c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \quad (3.10)$$

De evenredigheidsconstante c noemen we de dempingsconstante, uitgedrukt in Ns/m. De



Figuur 3.9: Demper.

dempingskracht plant zich ongewijzigd voort doorheen de demper en werkt steeds de beweging tegen.

3.3.4 De massa

De massa geeft de hoeveelheid materie van een lichaam weer. Met behulp van de massa modelleren we de traagheidskrachten in een systeem. De massa is geconcentreerd in twee types elementen: puntmassa's en starre lichamen. We spreken van een star lichaam als de onderlinge afstand tussen twee willekeurige punten van het lichaam constant blijft gedurende de beweging. De massa verschijnt in een dynamisch systeem via de tweede wet van Newton.

3.3.5 De tweede wet van Newton

Met behulp van de tweede wet van Newton kunnen we de bewegingsvergelijking van een mechanisch systeem afleiden. De tweede wet van Newton drukt uit dat de som van alle krachten die op een massa werken $\left(\sum F\right)$ gelijk is aan de massa m vermenigvuldigd met de absolute versnelling a .

$$\sum F = ma \quad (3.11)$$

a is de versnelling t.o.v. een inertiaal assenstelsel. In de praktijk is dit de versnelling t.o.v. een assenstelsel vast aan de aarde. We beschouwen steeds een rechtshandig assenstelsel. Verder geldt:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}$$

met v de absolute snelheid en r de plaatsvector van de massa m t.o.v. het inertiaal assenstelsel. In het geval van een één-dimensionaal systeem wordt de plaatsvector vervangen door 1 enkele coördinaat langs een as. Tekenconventies zijn heel belangrijk voor de toepassing van de tweede wet van Newton. Beschouw het massa-veer-demper-systeem van Figuur 3.10. We zien een verplaatsing naar rechts als de positieve verplaatsing. Dan geldt dat de positieve zin voor de snelheid $\dot{x}$ en de versnelling $\ddot{x}$ eveneens rechts is. Op basis van deze tekenconventie tekenen we het diagram van de vrije lichamen. We trekken een kader rond een massa en beschouwen alle erop aangrijpende krachten. De krachten worden aangeduid met hun (positieve) magnitude. De fysische zin van de kracht wordt aangeduid met een pijl. Neem bijvoorbeeld de veer van Figuur 3.10. De veerkracht met magnitude kx is naar links gericht bij een positieve verplaatsing x . Figuur 3.10 toont het diagram van de vrije lichamen voor de massa m . Uit de tweede wet van Newton volgt:

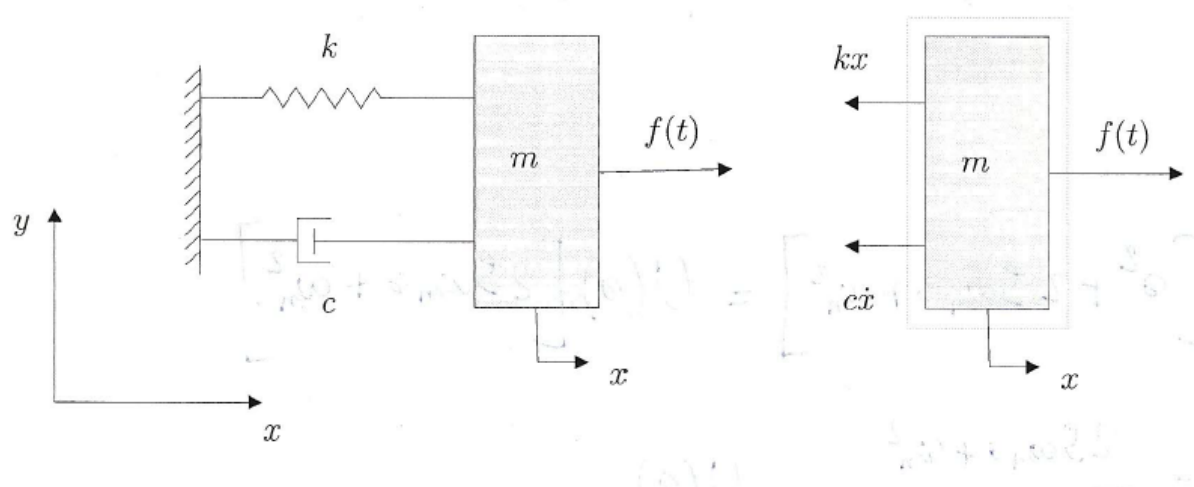
$$\sum F = ma \quad (3.12)$$

of

$$f(t) - c\dot{x} - kx = m\ddot{x} \quad (3.13)$$

(3.13) kunnen we herschikken als:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (3.14)$$



Figuur 3.10: Massa-veer-dempersysteem.

Indien een systeem samengesteld is uit meerdere massacomponenten dan wordt de tweede wet van Newton uitgeschreven per massacomponent. Een mechanisch systeem kan op twee verschillende wijzen worden aangedreven: ofwel door een opgelegde verplaatsing ofwel door een externe kracht. Beide kunnen tijdsafhankelijk zijn. De vergelijking (3.14) kunnen we herleiden tot de standaardvorm:

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = K\omega_n^2 u \quad (3.15)$$

Beide uitdrukkingen vergelijken levert volgend stelsel:

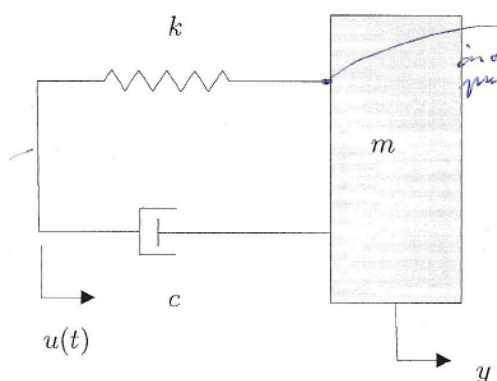
$$\begin{cases} 2\zeta\omega_n = \frac{c}{m} \\ \omega_n^2 = \frac{k}{m} \\ K\omega_n^2 = \frac{1}{m} \end{cases}$$

De natuurlijke frequentie ω_n , de dempingsfactor ζ , de statische versterkingsfactor K en de in- en uitgang hebben volgende uitdrukkingen:

$$\begin{aligned}\omega_n^2 &= \frac{k}{m} \\ \zeta &= \frac{c}{2\sqrt{km}} \\ K &= \frac{1}{k} \\ u &= f \\ y &= x\end{aligned}$$

Opmerking Het rechterlid van een tweede-ordesysteem heeft niet steeds de vorm $K\omega_n^2 u(t)$.

Het kan gebeuren dat er afgeleiden van $u(t)$ in het rechterlid cvan de modelvergelijking voorkomen. Neem bijvoorbeeld onderstaand mechanisch systeem. De ingang $u(t)$ is een opgelegde verplaatsing en dus een gekende functie van de tijd, Figuur 3.11.



Figuur 3.11: Opgelegde verplaatsing.

De tweede wet van Newton geeft:

$$m\ddot{y} = -k(y - u) - c(\dot{y} - \dot{u})$$

Na herschikking wordt dit:

$$m\ddot{y} + ky + c\dot{y} = c\dot{u} + ku$$

Beide leden delen door m geeft ons:

$$\ddot{y} + \frac{c}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{c}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u$$

Hieruit vinden we:

$$\begin{aligned} 2\zeta\omega_n &= \frac{c}{m} \\ \omega_n^2 &= \frac{k}{m} \end{aligned}$$

We vinden dus:

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u$$

Laplace transformatie levert:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow s^2 Y(s) - sy_0 - \dot{y}_0 + 2\zeta\omega_n s Y(s) - 2\zeta\omega_n y_0 + \omega_n^2 Y(s) &= 2\zeta\omega_n s U(s) - 2\zeta\omega_n u_0 + \omega_n^2 U(s) \\ \Leftrightarrow Y(s)[s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2] &= y_0[2\zeta\omega_n + s] + \dot{y}_0 - 2\zeta\omega_n u_0 + [2\zeta\omega_n s + \omega_n^2]U(s) \\ \Leftrightarrow Y(s) &= \frac{y_0[2\zeta\omega_n + s] + \dot{y}_0 - 2\zeta\omega_n u_0}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} U(s) \end{aligned}$$

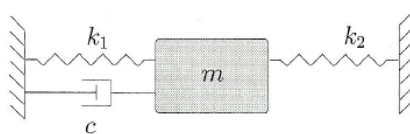
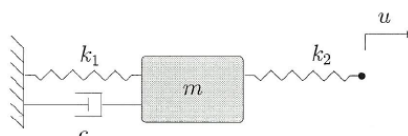
Opmerking Aangezien de noemer van deze vergelijking $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$ nog steeds dezelfde is blijft hetzelfde gevallenonderzoek ($\zeta > 0$, $\zeta = 1$, $\zeta < 1$) geldig wanneer we dit tweede-ordesysteem bestuderen.

De overdrachtsfunctie $G(s)$ bevat machten van s in de teller. Zolang de graad van de tellerveelterm in $G(s)$ kleiner is dan de graad van de noemerveelterm kunnen we m.b.v. splitsen in partieelbreuken en inverse Laplace transformatie de responsie vinden. De door ons beschouwde systemen voldoen hier steeds aan

3.4 Oefeningen

3.4.1 Massa-veersystemen: modellering

Beschouw de onderstaande mechanische systemen en geef telkens de modelvergelijking (Figuur 3.12, Figuur 5.1, Figuur 3.14). Alle massa's bewegen horizontaal.

**Figuur 3.12:** Horizontale translatie translatie.**Figuur 3.13:** Horizontale translatie.

3.4.2 Lineariseren

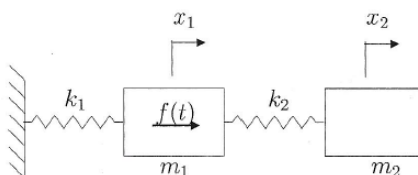
We beschouwen een massa m die via een niet-lineaire veer verbonden is met de muur (Figuur 3.15). De relatie tussen de veerkracht f en de verplaatsing x van de massa m wordt gegeven door:

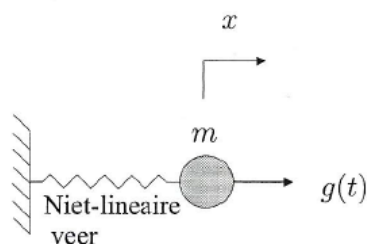
$$f(x) = ax^2$$

De massa wordt aangedreven m.b.v. een kracht $g(t)$:

$$g(t) = C + \Delta g(t)$$

met C een constante en $\Delta g(t)$ een afwijking rond C . Stel de lineaire bewegingsvergelijking op voor kleine bewegingen rond de evenwichtstoestand.

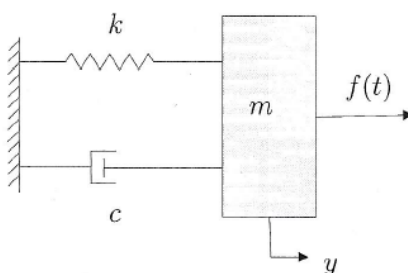
**Figuur 3.14:** Massa-veersysteem.



Figuur 3.15: Massa-veersysteem.

3.4.3 Stapantwoord

We hebben een massa-veer-demper systeem aangedreven door een kracht, Figuur 3.16. De kracht oefent een eenheidstap uit op de massa. Figuur 3.17 toont het stapantwoord van

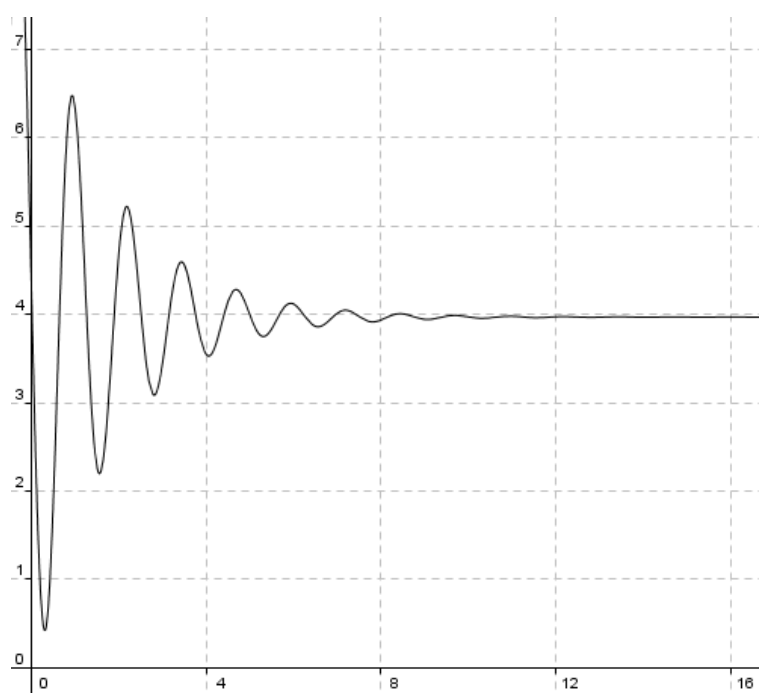


Figuur 3.16: Massa-veer-dempersysteem

de horizontale verplaatsing van de massa voor $t \geq 0$. De massa was in rust op $t = 0$. Bepaal de massa m , de stijfheid k en de dempingsconstante c aan de hand van deze figuur.

3.4.4 Lift

Een lift met massa m daalt met constante snelheid v_0 naar beneden aan een kabel met verwaarloosbare massa, doorsnede A en elasticiteitsmodulus E (Figuur 3.18). Op een gegeven ogenblik $t = 0$ blokkeert de trommel. Zij l de lengte van de kabel (gemeten in onbelaste toestand) op het ogenblik van de blokkering. De kabel kan beschouwd worden als



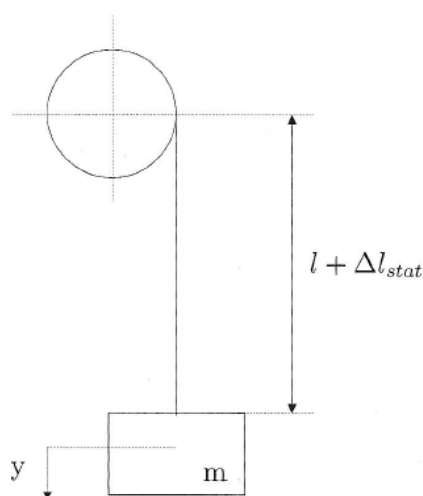
Figuur 3.17: Stapantwoord mechanisch systeem.

een lineaire veer met veerconstante $k = \frac{EA}{l}$. Bepaal de amplitude en de frequentie van de trillingen van de lift. Verwaarloos de demping. De zwaartekracht wordt niet beschouwd.

3.4.5 Schokdemper voor een motorfiets

Er moet een schokdemper met ondergedempt gedrag ontworpen worden voor een motorfiets met een massa van 200 kg. Ten gevolge van een verkeersdrempel op de weg heeft de schokdemper een verticale beginsnelheid en is de responsie zoals afgebeeld op de Figuur 3.19. Bepaal de dempingsconstante c en de veerconstante k zodat:

1. de gedempte periode 2 seconden bedraagt.
2. Er een reductie van de amplitude x_1 met een factor $\frac{1}{4}$ is na een halve cyclus ($x_{1.5} = \frac{x_1}{4}$). De zwaartekracht wordt niet beschouwd.



Figuur 3.18: Model van een lift.

3.4.6 Frequentieresponsie van een standaard tweede-orde systeem

Beschouw het massa-veer-dempersysteem van Figuur 3.20. De massa wordt aangedreven met een sinusoidale kracht:

$$u = u_0 \sin(\omega t)$$

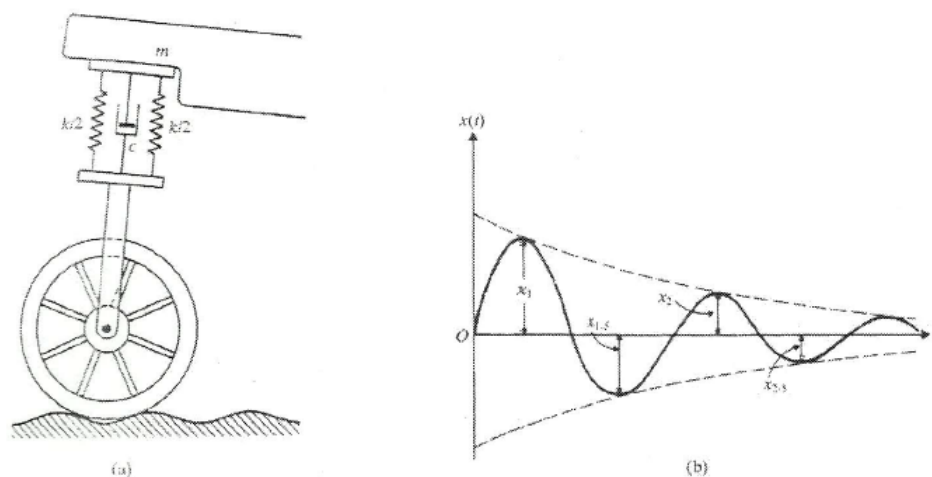
met $u_0 = 0.6 \text{ N}$ en $\omega = 5 \text{ rad/s}$. Verder geldt:

$$k = 200 \text{ N/m} \quad c = 6 \text{ Ns/m} \quad m = 2 \text{ kg}$$

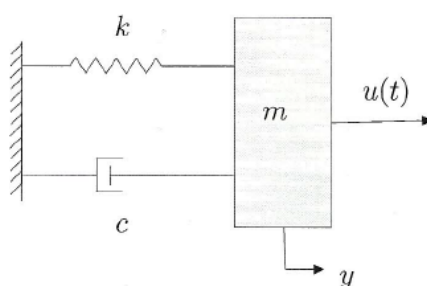
Stel de differentiaalvergelijking op voor de horizontale verplaatsing van de massa. Bepaal de natuurlijke frequentie, de dempingsfactor, de amplitude van de verplaatsing $y(t)$ in regime, de resonantiefrequentie en de resonantiepiek.

3.4.7 Auto over een vervormd wegdek

Figuur 3.21 toont een eenvoudig model van een auto die over een sinusoidaal wegdek rijdt. De band wordt als oneindig stijf beschouwd en blijft steeds in contact met het wegdek. De voorwaartse beweging van de auto is met een constante snelheid $V = 100 \text{ km/h}$ zodat we



Figuur 3.19: Model van een motorfiets.

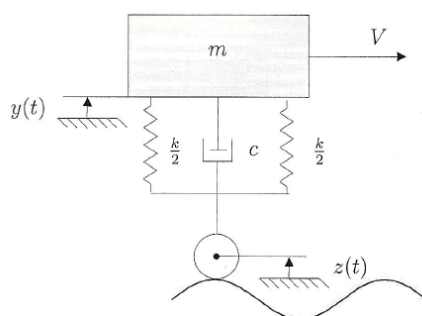


Figuur 3.20: Massa-veer-dempersysteem.

enkel de verticale beweging $y(t)$ bestuderen. De beweging van de as, opgelegd door het wegdek noemen we $z(t)$. De massa van de auto bedraagt 1200 kg. De ophanging heeft een veerconstante van 400 kN/m en een dempingsfactor $\zeta = 0.5$. Bepaal de amplitude van de verticale beweging van de auto als de weg een amplitude van 0.05 m heeft en een periode van 6 m. De zwaartekracht wordt niet beschouwd.

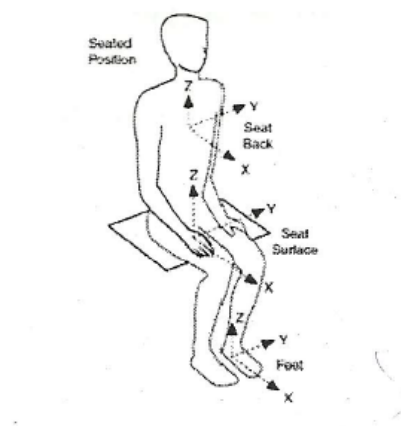
3.4.8 rugproblemen

Vrachtwagen- en busbestuurders lopen een hoger risico op rugpijn t.g.v. hun beroep. Om die reden worden vele studies uitgevoerd over de reactie van het menselijk lichaam



Figuur 3.21: Auto als tweede-ordesysteem.

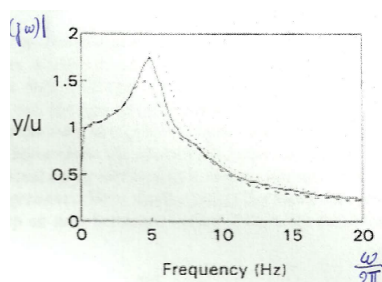
op trillingen veroorzaakt door het wegprofiel. Het rijcomfort wordt in relatie gebracht met het resonantiegedrag van het menselijk lichaam. Kennis van het resonantiegedrag kan de spanningen in de rug die voor problemen zorgen voorspellen. Volgend experiment wordt uitgevoerd: Een proefpersoon zit op een onvervormbare zitting zonder rugleuning (Figuur 3.22). De zitting wordt verticaal op en neer bewogen volgens een sinus. De verplaatsing ter hoogte van de rug wordt gemeten. Deze meting wordt herhaald voor verschillende frequenties waarmee de zitting op en neer beweegt. Figuur 3.23 stelt het



Figuur 3.22: Proefpersoon.

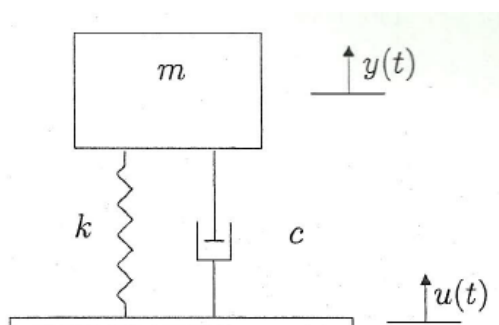
resultaat voor in de vorm van een bodediagram. De volle lijn stemt overeen met een persoon in normale zithouding, de andere lijnen respectievelijk een zeer rechte houding en

een voorover gebogen houding. We merken duidelijk dat het menselijk lichaam zich in



Figuur 3.23: Bodediagram.

deze situatie gedraagt als een massa-veer-demper systeem. We kunnen de zittende persoon voorstellen als een massa-veer-dempersysteem onderhevig aan een opgelegde verplaatsing zoals aangeduid op Figuur 3.24. y is de verplaatsing van de persoon ter hoogte van de rug en u is de verplaatsing van de zitting. We gebruiken deze informatie om na te gaan of



Figuur 3.24: Opgelegde verplaatsing.

bestuurders hinder kunnen ondervinden tijdens het rijden. Er wordt met een vrachtwagen over verschillende testtrajecten gereden aan een snelheid van 70 km/h. Het testtraject veroorzaakt een verticale verplaatsing z in functie van de afstand x die geschreven wordt als:

$$z(x) = r \sin(2\pi f x)$$

De amplitude r bedraagt 15 mm, de frequentie f kan een waarde aannemen van 3.5 tot 6 cycli per meter.

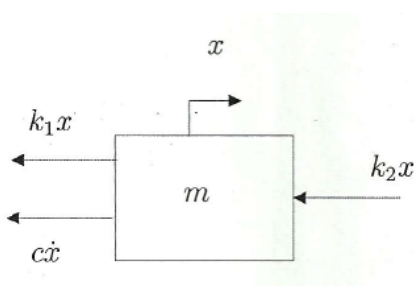
1. Is er gevaar voor resonantie in de beschouwde zone van de frequentie f voor een persoon in normale zithouding?
2. Indien er resonantie optreedt, wat is de verticale verplaatsing van de rug in resonantie t.g.v. het wegprofiel?

3.5 Oplossingen

3.5.1 Massa-veersysteem: modellering

We tekenen telkens het diagram van de vrije lichamen met bijbehorende krachten en kieten de positieve zin van de horizontale verplaatsingen op Figuur 3.25, 3.26 en 3.27. Daarna passen we op elk voorbeeld de tweede wet van Newton toe.

1. toepassen van de tweede wet van Newton levert:

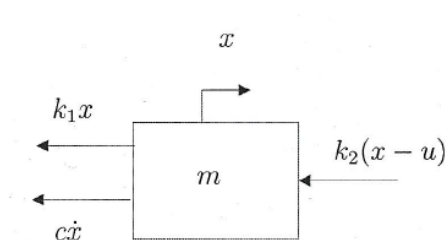


Figuur 3.25: Diagram van de vrije lichamen.

$$m\ddot{x} = -k_1x - k_2x - c\dot{x}$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x + c\dot{x} = 0$$

2. toepassen van de tweede wet van Newton levert:

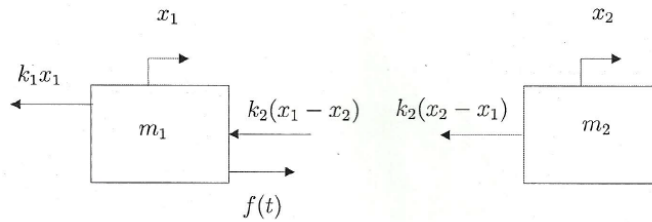


Figuur 3.26: Diagram van de vrije lichamen.

$$m\ddot{x} = -k_1x - c\dot{x} - k_2(x - u)$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + x(k_1 + k_2) = k_2u$$

3. toepassen van de tweede wet van Newton levert:



Figuur 3.27: Diagram van de vrije lichamen.

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) + f \\ m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1 + x_2) = f \\ m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

3.5.2 Lineariseren

Deze oefening is niet te kennen.

3.5.3 Stapantwoord

Toepassen van de tweede wet van Newton levert:

$$m\ddot{y} = f(t) - ky - c\dot{y} \Leftrightarrow m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = f(t) \quad (3.16)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{y} + \frac{c}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{1}{m}f(t) \quad (3.17)$$

Vergelijken met de standaardvorm ($\ddot{y} + 2\zeta\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 = K\omega_n^2u$) levert:

$$\begin{cases} 2\zeta\omega_n = \frac{c}{m} \\ \omega_n^2 = \frac{k}{m} \\ K\omega_n^2 = \frac{1}{m} \end{cases}$$

Hieruit halen we de waarde van de parameters:

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{c}{2\sqrt{km}} \\ \omega_n &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ K &= \frac{1}{k}\end{aligned}$$

De Figuur 3.16 stelt een ondergedempt stapantwoord voor. We kunnen onmiddellijk de statische versterking aflezen van de figuur:

$$K = 4 \Leftrightarrow k = 0.25 \text{ N/m}$$

De gedempte periode $T_p = 1.25 \text{ s}$ zodat $\omega_p = \frac{2\pi}{T_p} = 5.03 \text{ rad/s}$. Het verval van de responsie halen we uit het verloop van twee opeenvolgende piekwaarden (deze zijn juist één periode verschoven t.o.v. elkaar). De tweede maximale piekwaarde bedraagt de helft van de eerste maximale piekwaarde. We vinden aan de hand van de responsie:

$$\begin{aligned}\frac{y_f(t_1)}{y_f(t_1 + T_p)} &= \frac{\exp(-\zeta\omega_n t_1)A \sin(\omega_p t_1 + \phi)}{\exp(-\zeta\omega_n(t_1 + T_p))A \sin(\omega_p(t_1 + T_p) + \phi)} \\ &= \frac{1}{\exp(-\zeta\omega_n T_p)} \\ &= \exp\left(\frac{\zeta 2\pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\right) = 2\end{aligned}$$

Dit lossen we nu op naar ζ :

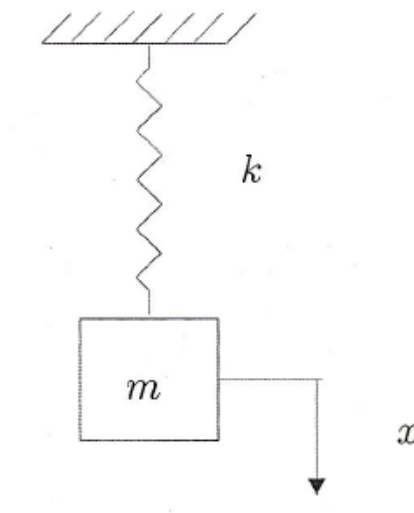
$$\begin{aligned}\frac{\zeta 2\pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}} &= \ln(2) \\ \Leftrightarrow \zeta^2 &= \frac{(1 - \zeta^2)(\ln 2)^2}{4\pi^2} \\ \Leftrightarrow \zeta^2 + (\ln 2)^2 \zeta^2 &= \frac{(\ln 2)^2}{4\pi^2} \\ \Leftrightarrow \zeta^2(1 + (\ln 2)^2) &= \frac{(\ln 2)^2}{4\pi^2} \\ \Leftrightarrow \zeta^2 &= \frac{(\ln 2)^2}{4\pi^2(1 + (\ln 2)^2)} \\ \Leftrightarrow \zeta &= \sqrt{\frac{(\ln 2)^2}{4\pi^2(1 + (\ln 2)^2)}} = 0.11\end{aligned}$$

We weten ook:

$$\begin{aligned}\omega_n &= \frac{\omega_p}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = 5.05 \text{ rad/s} \\ \omega_n &= \sqrt{\frac{k}{m}} \Leftrightarrow m = \frac{k}{\omega_n^2} = 0.0098 \text{ kg} \\ \frac{c}{m} &= 2\zeta\omega_n \Leftrightarrow c = 2m\zeta\omega_n = 0.0109 \text{ Ns/m}\end{aligned}$$

3.5.4 Lift

Op het ogenblik dat de lift blokkeert hebben we te maken met de vrije responsie van het ongedempt massaveersysteem van Figuur 3.28. De massa heeft beginpositie $x(0) = 0$ en een beginsnelheid $\dot{x}(0) = v_0$, nl. de snelheid van de lift. Het model is van de gedaante



Figuur 3.28: Schema van de lift na blokkering.

$$\begin{aligned}m\ddot{x} + kx &= 0 \\ \Leftrightarrow \ddot{x} + \omega_n^2 x &= 0\end{aligned}$$

We weten:

$$y_{in}(t) = \exp(-\zeta\omega_n t) \left(y_0 \cos(\omega_p t) + \frac{\dot{y}_0 + \zeta\omega_n y_0}{\omega_p} \sin(\omega_p t) \right)$$

verder geldt dat $\zeta = 0$ en $y_0 = 0$ hierdoor vinden we:

$$y_{in}(t) = \frac{\dot{y}_0}{\omega_p} \sin(\omega_p t)$$

verder weten we ook dat $\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = \omega_n$:

$$y_{in}(t) = \underbrace{\frac{\dot{y}}{\omega_n}}_{a(\omega)} \sin(\omega_n t)$$

De amplitude is:

$$\frac{v_0}{\omega_n} = \frac{v_0}{\sqrt{\frac{AE}{lm}}}$$

Vervolgens berekenen we de frequentie van de beweging:

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_n} \Leftrightarrow \frac{1}{T_p} = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

3.5.5 Schokdemper voor een motorfiets

Uit de opgave en de tekening kunnen we afleiden dat we met een ondergempt tweedesysteem te maken hebben. We weten dat we de dempingsconstante c en de veerconstante k kunnen bepalen uit de natuurlijke dempingsfrequentie ω_n en uit de dempingsfactor ζ , aangezien we weten dat de massa $m = 200$ kg. Als gegeven kregen we:

1. Een gedempte periode $\left(= \frac{2\pi}{\omega_p} \right)$ bedraagt 2 seconden.
2. er is een reductie van de amplitude met één vierde na een halve cyclus.

We weten:

$$\begin{aligned}
 \exp\left(\zeta\omega_n\frac{T_p}{2}\right) &= 4 \\
 \zeta\omega_n\frac{T_p}{2} &= \ln(4) \\
 \zeta\frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} &= \ln(4) \\
 \frac{\zeta^2\pi^2}{1-\zeta^2} &= (\ln(4))^2 \\
 \zeta^2\pi^2 &= (1-\zeta^2)(\ln(4))^2 \\
 \zeta^2(\pi^2 + (\ln(4))^2) &= (\ln(4))^2 \\
 \zeta^2 &= \frac{(\ln(4))^2}{\pi^2 + (\ln(4))^2} \\
 \zeta &= \sqrt{\frac{(\ln(4))^2}{\pi^2 + (\ln(4))^2}}
 \end{aligned}$$

We vinden $\zeta = 0.4037127\dots$. We weten ook:

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Hieruit vinden we:

$$\omega_n = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = 3.43 \text{ rad/s}$$

De modelvergelijking die we aan de hand van de figuur kunnen opstellen is:

$$\ddot{y} + \frac{c}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = 0$$

uit $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$ vinden we:

$$k = m\omega_n^2 = 2358,28 \text{ N/m}^2$$

Uit $2\zeta\omega_n^2 = \frac{c}{m}$ vinden we:

$$c = 2m\zeta\omega_n = 554,52 \text{ Ns/m}$$

3.5.6 Frequentieresponsie van een standaard tweede-ordesysteem

Om de differentiaalvergelijking op te stellen passen we de tweede wet van Newton toe.

De krachten die op de massa inwerken zijn respectievelijk de veerkracht $F_k = -ky$, de

dempingskracht $F_c = -c\dot{y}$ en de sinusoidale kracht $u(t) = u_0 \sin(\omega t)$. We krijgen dus

$$-ky(t) - c\dot{y}(t) + u(t) = m\ddot{y}(t)$$

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = u(t)$$

De standaardvorm van een tweede-ordesysteem is

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = K\omega_n^2 u$$

Hieruit halen we:

$$\begin{aligned}\omega_n^2 = \frac{k}{m} &\rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{200 \text{ N/m}}{2 \text{ kg}}} = 10 \text{ rad/s} \\ 2\zeta\omega_n = \frac{c}{m} &\rightarrow \zeta = \frac{c}{2\omega_n m} = \frac{6 \text{ Ns/m}}{2 \times 10 \text{ rad/s} \times 2 \text{ kg}} = 0.15 \\ K\omega_n^2 = \frac{1}{m} &\rightarrow K = \frac{1}{k} = \frac{1}{200 \text{ N/m}} = 0.005 \text{ m/N}\end{aligned}$$

Er geldt dat $y_{reg} = a(\omega)u_0 \sin[\omega t + \phi(\omega)]$ waarbij $a(\omega)$ en $\phi(\omega)$ voor een tweede orde systeem gegeven worden door

$$\begin{aligned}|G(j\omega)| &= \frac{K\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}} = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} \\ \arg G(j\omega) &= -\arctan\left(\frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}\right) = -\arctan\left(\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right)\end{aligned}$$

Wanneer we de numerieke waarden invullen krijgen we:

$$\begin{aligned}a(5 \text{ rad/s}) &= \frac{0.005 \text{ m/N}}{\sqrt{\left(1 - \frac{25}{100}\right)^2 + 4 \times (0.15)^2 \times \frac{25}{100}}} = 0.0065 \text{ m/N} \\ \phi(5 \text{ rad/s}) &= -\arctan\left(\frac{2 \times 0.15 \times \frac{5}{10}}{1 - \frac{25}{100}}\right) = 0.1974 \text{ rad}\end{aligned}$$

We krijgen dus $y_{reg} = 0.0065 \text{ m/N} \times 0.6 \text{ N} \sin[5 \text{ rad/s} \times t + 0.1974 \text{ rad}]$ of $y_{reg} = 0.0039 \sin[5t + 0.1974]$. De amplitude van de verplaatsing in regime is dus 0.0039 m. De resonantiefrequentie ω_r wordt gegeven door $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ en bestaat enkel als $\zeta < \frac{\sqrt{2}}{2}$, wat hier het

geval is. We kunnen ω_r dus berekenen: $\omega_r = 10 \text{ rad/s} \times \sqrt{1 - 2 \times (0.15)^2} = 9.7714 \text{ rad/s}$.

De resonantiefrequentie wordt gegeven door:

$$a_{max} = \frac{K}{\sqrt{4\zeta^2 - 4\zeta^4}} = \frac{0.005 \text{ m/N}}{\sqrt{4 \times (0.15)^2 - 4 \times (0.15)^4}} = 0.0169 \text{ m/N}$$

De resonantieamplitude wordt gegeven door $a_{max} \times u_0$ en is 0.0101 m , wat ongeveer 2.5 keer de amplitude van de verplaatsing in regime is.

3.5.7 Auto over een vervormd wegdek

Eerst stellen we de bewegingsvergelijking op voor de beweging in de verticale richting. De zwaartekracht moet niet beschouwd worden. We passen de tweede wet van Newton toe. De massa m is de massa van de auto en a is de versnelling van de auto in verticale zin, dus $\ddot{y}(t)$. De verschillende krachten die inwerken op de massa zijn

1. de veerkracht: $F_k = -k(y(t) - z(t))$
2. de dempingskracht: $F_c = -c(\dot{y}(t) - \dot{z}(t))$

De bewegingsvergelijking wordt dus:

$$m\ddot{y}(t) = -k(y(t) - z(t)) - c(\dot{y}(t) - \dot{z}(t))$$

$$m\ddot{y}(t) + ky(t) + c\dot{y}(t) = c\dot{z}(t) + kz(t)$$

Wanneer we deze vergelijking in de standaardvorm noteren krijgen we:

$$\ddot{y}(t) + \frac{c}{m}\dot{y}(t) + \frac{k}{m}y(t) = \frac{c}{m}\dot{z}(t) + \frac{k}{m}z(t)$$

of

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2y(t) = 2\zeta\omega_n\dot{z}(t) + \omega_n^2z(t)$$

waarbij $\zeta = 0.5$ (gegeven) en $\omega_n^2 = \frac{k}{m} \rightarrow \omega_n = 18.2574 \text{ rad/s}$ is.

De weg heeft een amplitude van 0.05 m en een periode van 6 m . We willen natuurlijk weten hoeveel tijd 6 m in beslag neemt. De (constante) horizontale snelheid V is 100 km/h .

Om een afstand van 6 m af te leggen is er een tijd $T = \frac{6}{V} = 0.216$ s nodig. De hoekpulsatie $\omega = \frac{2\pi}{T} = 29.0888$ rad/s. Hieruit volgt dat de beweging van de as geschreven kan worden als:

$$z(t) = 0.05 \sin(29.0888t)$$

Bij een sinusoidale belasting ($u(t) = 0$ als $t < 0$ en $u(t) = u_0 \sin(\omega t)$ als $t \geq 0$) ontstaat een sinusoidaal regime na het uitsterven van de invloed van de beginvoorwaarden:

$$y_{reg} = a(\omega) u_0 \sin(\omega t + \phi(\omega))$$

waarbij $a(\omega)$ gegeven wordt door $|G(j\omega)|$ en $\phi(\omega)$ door $\arg G(j\omega)$ met $G(s)$ de overdrachtsfunctie van het systeem. Hier wordt $G(s)$ bepaald door:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ G(j\omega) &= \frac{\omega_n^2 + j2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega} \\ |G(j\omega)| &= \frac{\sqrt{\omega_n^4 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}} = \frac{\sqrt{1 + 4\zeta^2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + 4\zeta^2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} \\ \arg G(j\omega) &= \arctan \frac{2\zeta\omega}{\omega_n} - \arctan \frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \end{aligned}$$

Wanneer we de numerieke waarden $\frac{\omega}{\omega_n} = \frac{29.0888 \text{ rad/s}}{18.2574 \text{ rad/s}} = 1.5933$ en $\zeta = 0.5$ invullen, krijgen we dat

$$|G(j\omega)| = \frac{\sqrt{1 + 4 \times 0.5^2 \times (1.5933)^2}}{\sqrt{(1 - (1.5933)^2)^2 + 4 \times 0.5^2 \times (1.5933)^2}} = 0.8493$$

$$\arg G(j\omega) = \arctan(2 \times 0.5 \times 1.5933) - \arctan\left(\frac{2 \times 0.5 \times 1.5933}{1 - (1.5933)^2}\right) = 1.8132 \text{ rad}$$

De amplitude van de trilling wordt gegeven door $a(\omega) \times z_0$ en is 0.0425 m.

3.5.8 Rugproblemen

Hoofdstuk 4

Stabiliteit

4.1 Hogere-ordesystemen

Met hogere-ordesystemen bedoel we systemen waarvoor de modelvergelijking afgeleiden van de onbekende functie bevat met een orde hoger dan twee. We nemen als voorbeeld een derde-ordesysteem. De overdrachtsfunctie $G(s)$ heeft de vorm:

$$G(s) = \frac{T(s)}{s^3 + as^2 + bs + c}$$

Een derde graadsveelterm heeft ofwel één ofwel drie reële wortels. M.a.w. $G(s)$ kan geschreven worden als:

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s) = \frac{T_1(s)}{s - p_1} \frac{T_2(s)}{s - p_2} \frac{T_3(s)}{s - p_3}$$

met p_1 , p_2 en p_3 reëel, ofwel als:

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{T_1(s)}{s - p_1} \frac{T_2(s)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

met p_1 reëel en $\zeta < 1$. Splitsen in partieelbreuken en inverse Laplace transformatie geeft ons een responsie die opgebouwd is uit de responsie van eerste-en/of tweede-ordesystemen en/of integratoren. Dit geldt voor alle modelvergelijkingen van lineaire tijdsinvariante systemen met een orde hoger dan twee. Naast hun technisch belang als modelvergelijking voor de systemen uit hoofdstukken 2 en 3 spelen het eerste-ordemodel en het tweede-ordemodel ook de functie van subsysteem voor een hoger-ordemodel.

4.2 Stabiliteit

De responsie van een lineair tijdsinvariant systeem is de som van de vrije responsie en de gedwongen responsie. In het Laplace domein hebben we:

$$Y(s) = G_0(s) + G(s)U(s)$$

$G_0(s)$ hangt af van de beginvoorwaarden, $G(s)$ is de transfertfunctie. Beide zijn rationale functies in s en bezitten dezelfde noemer. Voor een algemeen n -de-orde systeem kunnen we $G(s)$ schrijven als:

$$G(s) = \frac{s^m b_0 + s_{m-1} b_1 + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} \quad (4.1)$$

met $m < n$ voor praktische systemen. De noemer van $G(s)$ noemen we de karakteristieke veelterm. De wortels van de karakteristieke vergelijking

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

noteren we als $p_1, \dots, p_n$; de wortels van de tellerveelterm

$$s^m b_0 + s_{m-1} b_1 + \dots + b_m = 0$$

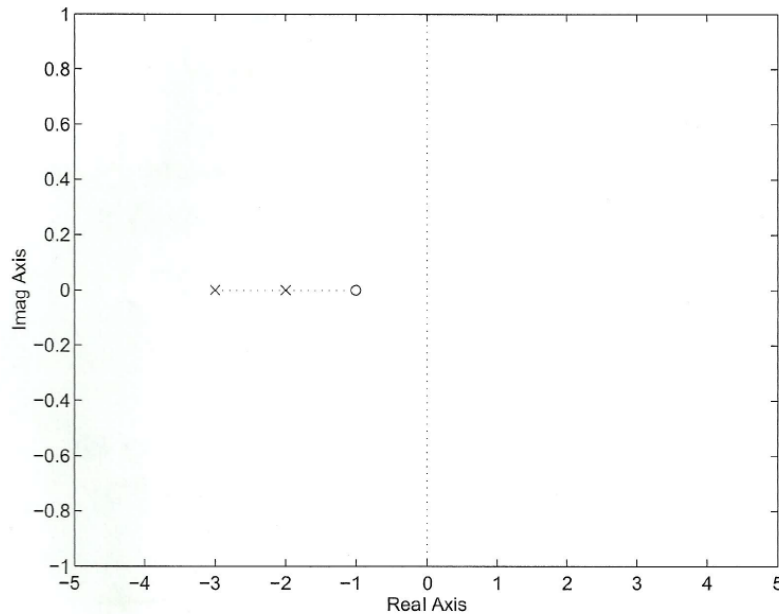
noteren we als $z_1, \dots, z_m$. Noemer en teller kunnen we ontbinden in factoren. $G(s)$ wordt nu:

$$G(s) = K \frac{(s - z_1) \dots (s - z_m)}{(s - p_1) \dots (s - p_n)}$$

De waarden $z_1, \dots, z_m$ worden de nullen van $G(s)$ genoemd, de waarden $p_1, \dots, p_n$ worden de polen van $G(s)$ genoemd. De polen en de nullen van $G(s)$ zijn ofwel reëel ofwel komen ze voor in complex toegevoegde paren. In het complexe vlak wordt een pool voorgesteld door een kruis, een nulpunt door een cirkel. Figuur 4.1 toont de polen en de nullen van de transfertfunctie

$$G(s) = \frac{s + 1}{(s + 2)(s + 3)}$$

De polen van $G(s)$ spelen een cruciale rol voor het verloop van de uitgang $y(t)$. Immers $Y(s) = G_0(s) + G(s)U(s)$ valt na het splitsen in partieelbreuken uiteen in een gedeelte



Figuur 4.1: Voorstelling van polen en nullen in het complexe vlak.

bepaald door de factoren afkomstig van $G_0(s)$ en $G(s)$ die volgen uit de polen $p_1, \dots, p_n$ ($G_0(s)$ en $G(s)$ bezitten dezelfde noemer) en een gedeelte bepaald door de ingang. De termen in $y(t)$ beheerst door de polen zijn van de gedaante $K_1 \exp(p_1 t)$, met p_1 een reële pool en/of $K_2 \exp(\alpha t) \sin(\beta t + \phi)$ met $p_i = \alpha \pm j\beta$, $i = 2, 3$ een paar complex toegevoegde polen van het systeem. Indien $p_1 < 0$ en $\alpha < 0$ dan worden de termen in $y(t)$ beheerst door de polen van het systeem verwaarloosbaar klein na voldoende lange tijd en blijft enkel het gedeelte bepaald door de ingang over. We hebben een overgangsverschijnsel gedomineerd door de aard van de polen waarna er zich een regime instelt afhankelijk van de ingang. Indien $u(t)$ een stapfunctie is dan stelt er zich een nieuwe evenwichtstoestand in. De polen van een lineair tijdsinvariant systeem bepalen de stabiliteit van het systeem. Zij $G(s) = \frac{T(s)}{N(s)}$ de overdrachtsfuncite van een algemeen n-de-ordesysteem dan is het systeem stabiel als alle wortels van de vergelijking

$$N(s) = 0 \quad (4.2)$$

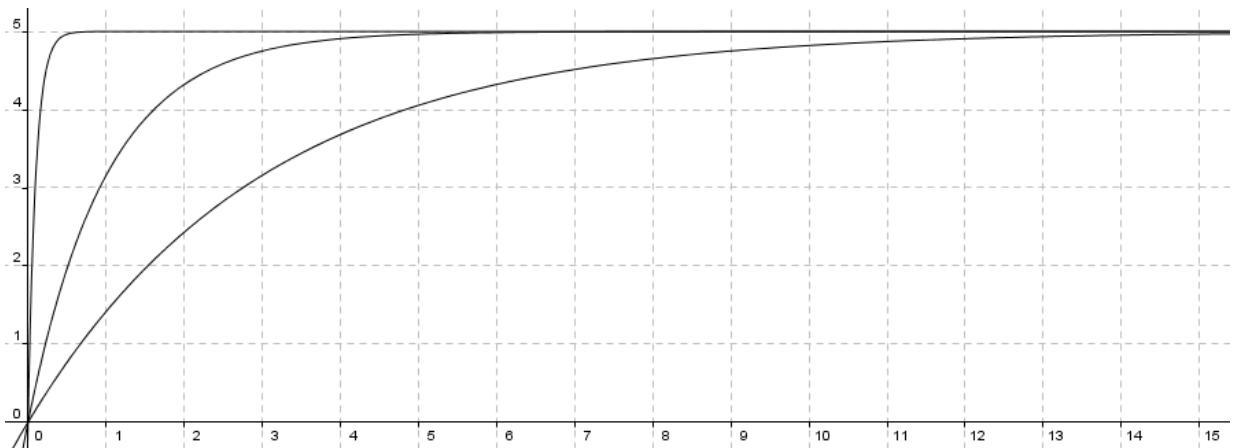
een negatief reëel deel hebben of m.a.w. als alle polen van $G(s)$ in het open linkerhalfvlak liggen van het complexe vlak. In dit geval sterft het overgangsverschijnsel uit en geeft een begrensde ingang aanleiding tot een begrensde uitgang. De snelheid waarmee het overgangsverschijnsel uitsterft wordt bepaald door de grootte van het reële gedeelte van de polen. De karakteristieke vergelijking van het standaard eerste-ordessysteem wordt gegeven door:

$$s\tau + 1 = 0$$

Er is één reële pool

$$p_1 = \frac{-1}{\tau}$$

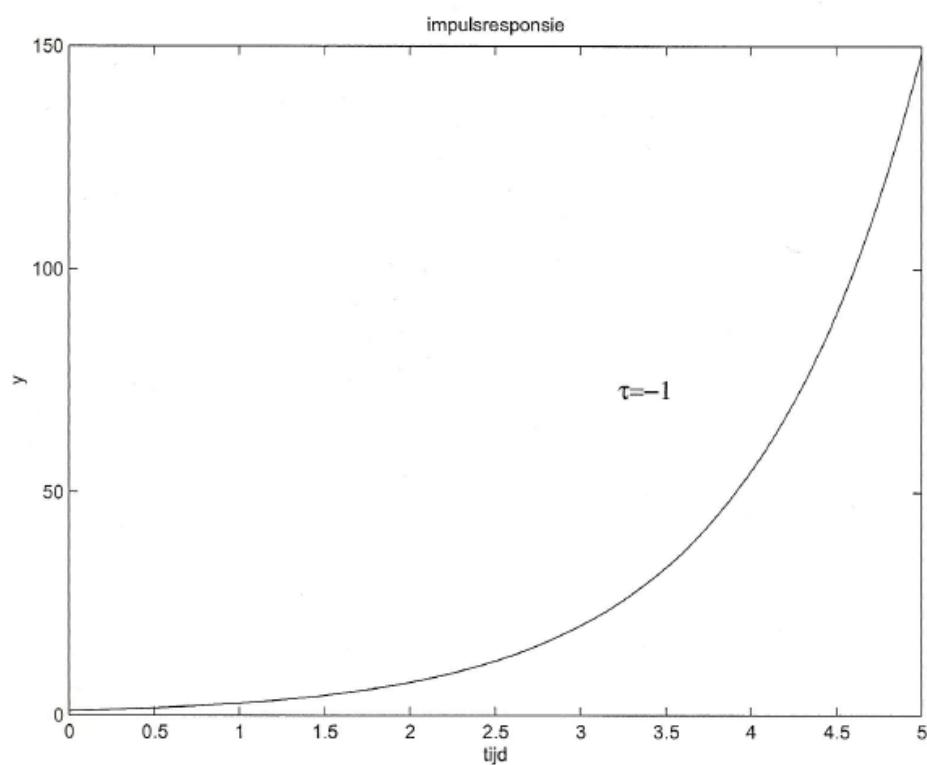
De tijdsconstante τ bepaalt de ligging van de pool van $G(s)$. Voor $\tau > 0$ is het eerste-ordessysteem stabiel. Hoe groter τ , hoe trager het overgangsverschijnsel exponentieel uitsterft (Figuur 4.2). Voor $\tau < 0$ stelt er zich geen regime in en neemt de responsie in



Figuur 4.2: Overgangsverschijnsel van een eerste-ordessysteem met beginvoorwaarden gelijk aan nul.

grootte toe tot er breuk optreedt. Figuur 4.3 illustreert dit. De karakteristieke veelterm van het standaard tweede-ordessysteem is:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

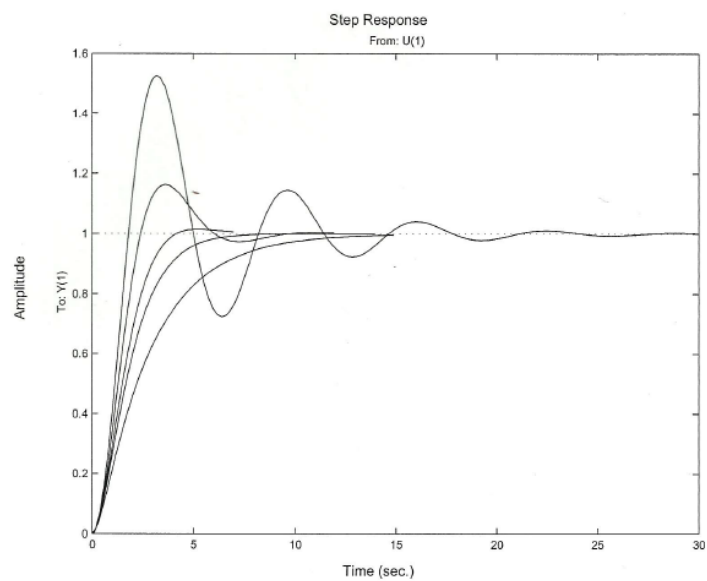


Figuur 4.3: Responsie van een instabiel eerste-ordesysteem, $\tau < 0$.

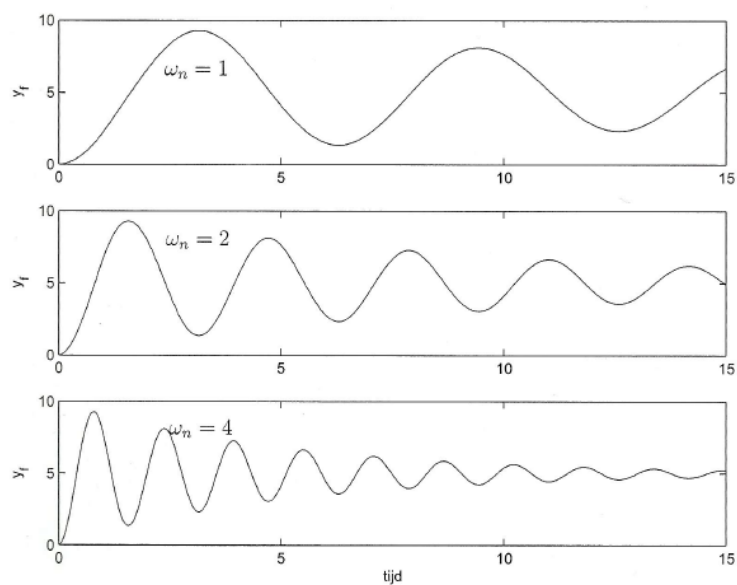
De polen p_i , $i = 1, 2$ hebben de gedaante

$$p_i = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

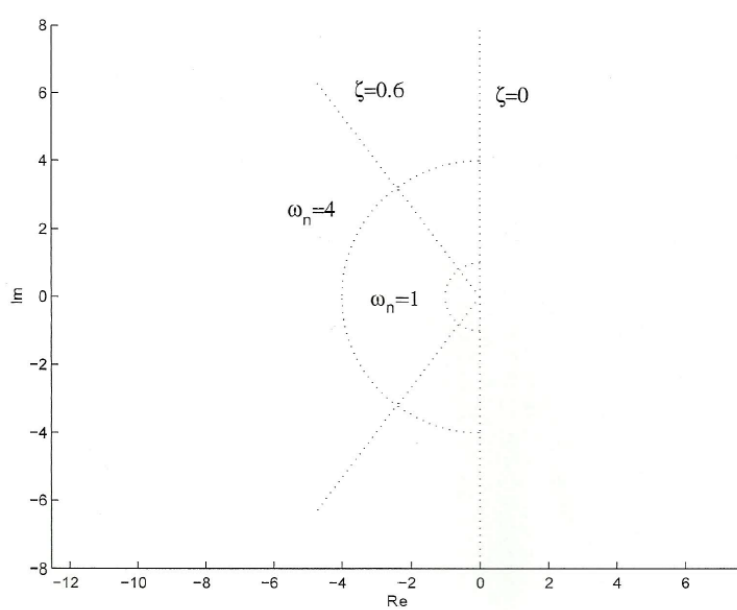
De waarde van de dempingsfactor ζ bepaalt of de polen al of niet complex toegevoegd zijn. De snelheid waarmee het overgangsverschijnsel uitsterft hangt af van het product $\zeta\omega_n$. De figuren 4.4 en 4.5 tonen het stapantwoord voor verschillende waarden van ζ en ω_n . Figuur 4.6 toont de ligging van de polen voor respectievelijk een constante ζ en een constante ω_n .



Figuur 4.4: Transiënt gedrag van een tweede-ordessysteem, $\omega_n = 1$ en ζ achtereenvolgens [1.5, 1, 0.8, 0.5, 0.2].



Figuur 4.5: Transiënt gedrag van een tweede-ordessysteem, $\zeta = 0.2$ en ω_n achtereenvolgens [1, 2, 4].



Figuur 4.6: Polen van een tweede-ordesysteem.

Hoofdstuk 5

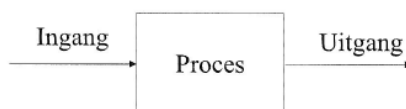
Terugkoppeling

5.1 Inleiding

In de voorgaande hoofdstukken werden de eerste- en tweede-ordedynamica's geanalyseerd. Bij een gekende set van standaard parameters (τ , K voor het eerste-ordesysteem en ζ , ω_n , K voor het tweede-ordesysteem) kan het systeemantwoord op een stapingang voorspeld worden. De standaard parameters hebben een éénduidige relatie met de fysische parameters van het systeem. Als we bijvoorbeeld het verloop van het waterpeil in een vat met een afvoerleiding bestuderen dan is de tijdsconstante $\tau = RA$ met R de weerstand van de leiding en A de dwarssectie van het vat. Indien de dynamica niet het gewenste verloop vertoont, hebben we twee opties: We kunnen de fysische parameters van het systeem proberen te veranderen of we kunnen het systeem bijsturen met een gepaste externe ingang. Deze laatste optie noemen we het regelen van het systeem. In wat volgt zullen we systemen regelen of bijsturen door deze in een terugkoppellus te plaatsen. Daarvoor definiëren we eerst een aantal basisbegrippen.

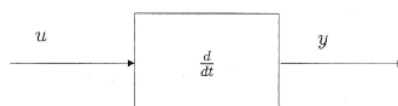
5.2 Basisbegrippen

Geregelde systemen worden vaak in een blokschema voorgesteld. Een blokschema is een schematische voorstelling van het oorzaak-gevolg verband tussen de in- en uitgang van een fysisch systeem. Figuur 5.1 toont het eenvoudigste blokschema van één element. De



Figuur 5.1: Blokschema van één element.

pijlen duiden de richting van de informatiestroom of het signaal aan. Figuur 5.2 toont een voorbeeld waarbij het verband tussen de ingang u en de uitgang y een afleiding is.



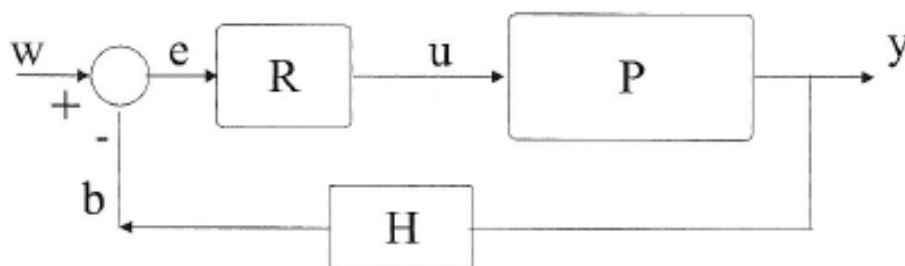
Figuur 5.2: Blokschema van een afleiding.

$$y = \frac{du}{dt}$$

Het blokschema van een terugkoppellus is afgebeeld op Figuur 5.3. Signalen worden van elkaar afgetrokken of met elkaar opgeteld d.m.v. een sommatiepunt. Dit wordt aangeduid met een cirkel met bijbehorende tekens. Het somatiepunt op Figuur 5.3 duidt aan dat

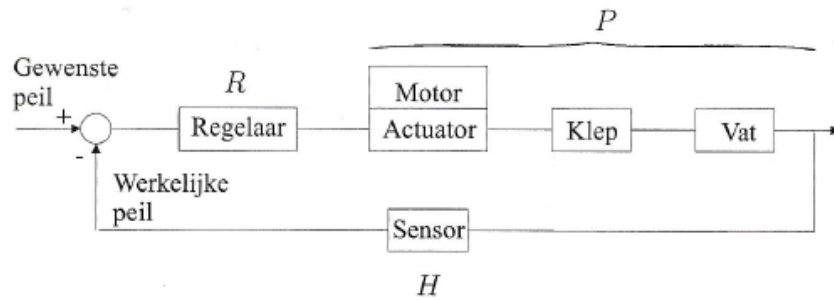
$$e = w - b$$

Het blokschema bevat een aantal belangrijke elementen. Het systeem waarvan we het gedrag wensen te beïnvloeden, noemen we het proces (blok P). De uitgang van het proces wordt geregeld met behulp van een stuursignaal. De regelaar (blok R) genereert dit stuursignaal. Uiteraard bevat een regelkring een meting van de uitgang, voorgesteld door het



Figuur 5.3: Algemeen schema van een terugkoppellus.

symbool H . De ingang u wordt de gemanipuleerde variabele genoemd en zorgt voor de controle actie. De uitgang y is de gecontroleerde variabele. Het voorwaartse pad bevat de voorwaartse (regel)elementen R en het proces P . Het terugkoppelpad is het transmissiepad van de gecontroleerde variabele y naar het somatiepunt en bevat de terugkoppелеlementen H . Het referentiesignaal w , extern toegevoerd aan de regelaar, stelt meestal het ideale gedrag van het proces voor. Voor een regelsysteem is w een constante wenswaarde (set-point), voor een volgsysteem (servosysteem) is w een tijdsvariërend signaal. Het signaal b wordt het terugkoppelsignaal genoemd, het verschil $w - b$ is het foutsignaal e . De uitgang wordt gemeten en vergeleken met het referentiesignaal. De regelaar zal het verschil tussen beide verwerken tot een stuursignaal om zo het gewenste gedrag (benaderend) te verkrijgen. Bij regeling d.m.v. een terugkoppellus neemt de regelaar actie nadat de uitgang afwijkt van het gewenste gedrag. Een systeem met een terugkoppelpad zoals op Figuur 5.3 is een geslotenkringsysteem. Bij afwezigheid van de terugkoppellus spreken we van een openkringsysteem. Een werkelijk proces is over het algemeen terug te brengen tot het blokschema van Figuur 5.3. Uiteraard kunnen de blokken uit verschillende delen bestaan. Denken we maar aan een peilregeling in een vat (Figuur 5.4). Het peil wordt gemeten met een sensor en vergeleken met het gewenste peil. De regelaar stuurt op basis van de fout een signaal naar de motor (actuator) die op zijn beurt de klep verstelt. Als we de uitgang van een proces willen beïnvloeden, moeten we uiteraard het verloop van de uitgang op een stuursignaal kunnen voorspellen. Vele processen kunnen gemodelleerd worden met behulp van de eenvoudige basisdynamica's uit de hoofdstukken 2 en 3.



Figuur 5.4: Algemeen blokschema van een peilregeling.

5.3 Transfertfunctie van de geslotenkring

We beschouwen een systeem in evenwicht voor $t < 0$. De signalen u , y , b , r en e op Figuur 5.3 hebben een constante waarde in evenwicht. Dit noteren we als u_e , y_e , b_e , w_e en e_e . Bij een verstoring uit de beschouwde evenwichtssituatie geldt:

$$u = u_e + \Delta u$$

$$y = y_e + \Delta y$$

$$b = b_e + \Delta b$$

$$w = w_e + \Delta w$$

$$e = e_e + \Delta e$$

De grootheden Δu , Δy , Δb , Δw , en Δe stellen de afwijkingen t.o.v. de evenwichtstoestand voor en noemen we afwijkingsveranderlijken. In wat volgt werken we enkel nog met afwijkingsveranderlijken en laten we de notatie “ Δ ” weg. De beschouwde evenwichtstoestand definiëren we als het werkingpunt van het systeem. Elk element in een blokschema wordt voorgesteld met behulp van z’n transferfunctie. Indien bijvoorbeeld het te regelen proces een eerste-ordeproces is, geldt:

$$\tau \dot{y} + y = Ku$$

of in het Laplace domein

$$Y(s) = \frac{K}{s\tau + 1} U(s)$$

daar de veranderlijken u en y afwijkingsveranderlijken zijn en dus per definitie hun beginvoorwaarden nul zijn. De transfertfunctie $P(s)$ wordt:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s\tau + 1}$$

De geslotenkringtransfertfunctie, d.i. het verband tussen het signaal w , het gewenste gedrag en de uitgang y , het werkelijke gedrag, kunnen we op basis van Figuur 5.3 als volgt opstellen:

$$U(s) = R(s)E(s) \quad (5.1)$$

$$Y(s) = P(s)U(s) \quad (5.2)$$

$$B(s) = H(s)Y(s) \quad (5.3)$$

Verder geldt:

$$E(s) = W(s) - B(s) \quad (5.4)$$

Uit (5.1)-(5.4) volgt

$$\begin{aligned} Y(s) &= P(s)R(s)E(s) \\ &= P(s)R(s)[W(s) - B(s)] \\ &= P(s)R(s)[W(s) - H(s)Y(s)] \end{aligned}$$

De geslotenkringtransfertfunctie noteren we als $G(s)$ en wordt gegeven door:

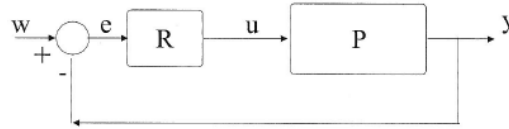
$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{P(s)R(s)}{1 + P(s)R(s)H(s)} \stackrel{not}{=} G(s) \quad (5.5)$$

$P(s)R(s)$ stelt de transfertfunctie van het voorwaartse pad voor. $P(s)R(s)H(s)$ noemen we de openkringtransfertfunctie. Algemeen geldt dat de geslotenkringtransfertfunctie $G(s)$ als volgt wordt opgesteld:

$$G(s) = \frac{\text{transfertfunctie voorwaartse pad}}{1 + \text{openkringtransfertfunctie}}$$

5.4 PID-regelalgoritme

De regelaar R van de terugkoppellus genereert een stuursignaal op basis van de fout. De PID-regelaar komt in veel van de regelkringen in de procesindustrie voor en wordt hier uiteengezet. We gebruiken het blokschema van Figuur 5.5. We noemen dit een



Figuur 5.5: Blokschema van een eenheidsterugkoppeling.

eenheidsterugkoppeling omdat de meetdynamica $H = 1$. De PID-regelaar bevat 3 types regelacties: de P-actie, de I-actie en de D-actie. We leggen elk van deze acties uit.

5.4.1 P-actie

De meest eenvoudige controle actie is een stuursignaal u evenredig met de fout $e = w - y$.

$$u = K_c e$$

K_c noemen we de proportionele versterking. Na Laplace transformatie vinden we

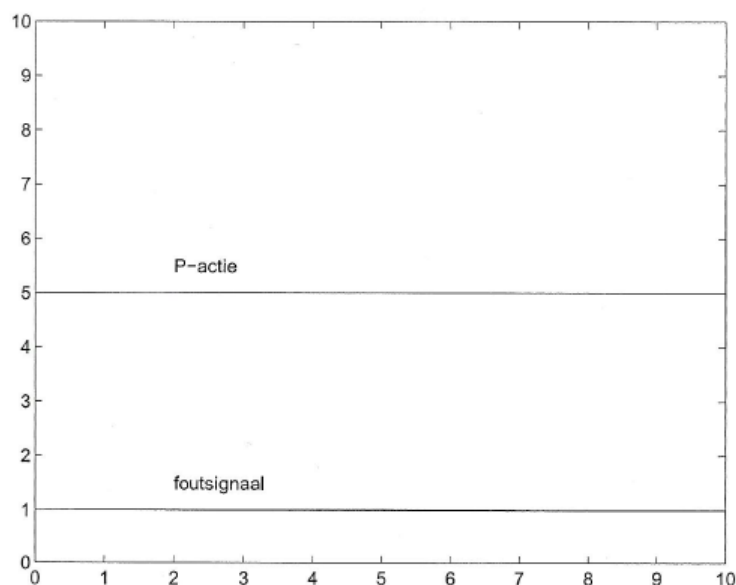
$$U(s) = K_c E(s) = R(s)E(s)$$

Figuur 5.6 toont het stuursignaal als de fout e een eenheidssprong maakt. Foutsignaal en stuursignaal zijn steeds met elkaar in fase.

5.4.2 I-actie

Bij een zuivere integrerende regelaar verandert het stuursignaal u met een snelheid die evenredig is met de fout, m.a.w. indien de fout verdubbelt, verandert u dubbel zo snel.

$$\frac{du}{dt} = \frac{K_c}{T_i} e$$



Figuur 5.6: Stapantwoord van een proportionele regelaar met $K_c = 5$.

of

$$u = \frac{K_c}{T_i} \int_0^t e(\theta) d\theta$$

T_i is de integratietijd, K_c is de evenredigheidsconstante waarmee de I-actie vermenigvuldigd wordt. Na Laplace transformatie vinden we

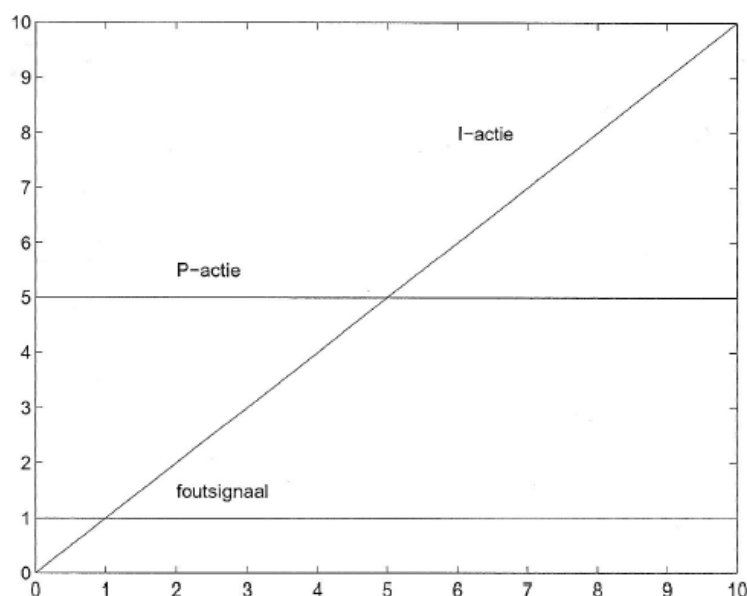
$$U(s) = \frac{K_c}{sT_i} E(s) = R(s)E(s)$$

De stapresponsie is afgebeeld op Figuur 5.7. T_i is de tijd nodig opdat de zuivere I-werking hetzelfde resultaat zou genereren als een proportionele regelaar met zelfde versterking K_c . Indien de fout sinusoidaal verandert, ijlt het regelsignaal 90 graden na op de fout aangezien:

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Het stuursignaal blijft veranderen zolang er een fout is en behoudt zijn recentste waarde bij fout nul. De transfertfunctie van een PI-regelaar is als volgt:

$$R(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{sT_i}\right)$$



Figuur 5.7: Stapantwoord van een integrerende regelaar, $K_c = 5$, $T_i = 5$ tijdseenheden.

Het stapantwoord van deze lineaire regelaar is de superpositie van het stapantwoord van de P-regelaar en de I-regelaar. Het stuursignaal ijlt tussen de 0 en de 90 graden na op een sinusoidale fout.

5.4.3 D-actie

Het derde type regelactie is de differentiërende regelaar. Het stuursignaal is evenredig met de snelheid waarmee de fout verandert.

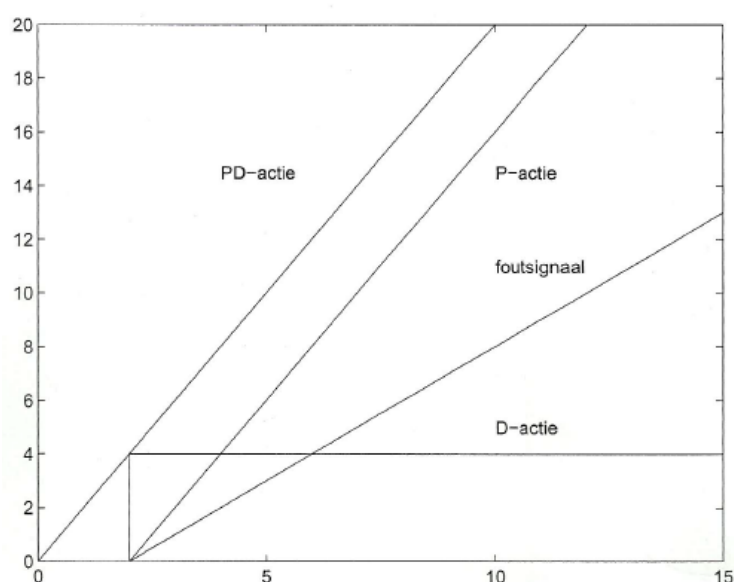
$$u = K_c T_d \frac{de}{dt}$$

T_d is de differentiatietijd. In het Laplacedomein wordt dit:

$$U(s) = K_c T_d s E(s) = R(s) E(s)$$

De D-actie komt niet alleen voor omdat een sprong in de wenswaarde of een storing zou leiden tot een oneindig groot stuursignaal. Laten we de D-actie illustreren aan de hand van een PD-regeling bij een lineair variërende fout $e = t$. Dit komt overeen met een

stapverandering van de snelheid van de fout. Figuur 5.8 toont de responsie. Op het ogenblik t heeft de PD-regelaar hetzelfde stuursignaal als de proportionele regelaar (met zelfde K_c) op het ogenblik $t + T_d$. Bij een sinusoidale fout ijlt de PD-regelaar tussen de 0 en de 90 graden voor op de fout. D-actie heeft een anticiperende werking.



Figuur 5.8: Responsie van een PD-regelaar op een snelheidsstap, $K_c = 2$, $T_d = 2$ tijdeenheden.

5.4.4 PID-regelaar

De drie types regelacties samen geven de PID-regelaar met als transfertfunctie:

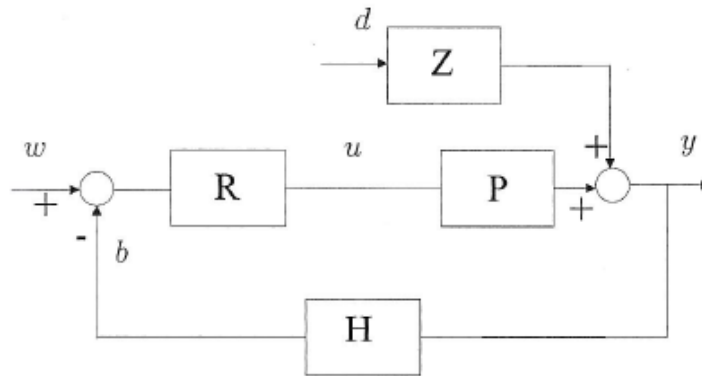
$$R(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right)$$

Er zijn 3 regelparameters beschikbaar. Deze zullen het dynamisch gedrag van de geslotenkring beïnvloeden. De ontwerpspecificaties van een regelkring zijn vaak tegestrijdig zodat we een compromis moeten sluiten. Het aftellen (tuning) van de regelaar gebeurt vaak met behulp van vuistregels die gebaseerd zijn op eenvoudige procestesten zoals het stapantwoord.

5.5 Eigenschappen van terugkoppeling

5.5.1 Volggedrag en regelgedrag

We beschouwen de regelkring van Figuur 5.9. Het proces wordt verstoord door een storing d met overdrachtsfunctie $Z(s)$. We nemen aan dat de meting een veel snellere dynamica heeft dan het proces waardoor we $H(s) = 1$ kunnen stellen. In geslotenkring is de uitgang



Figuur 5.9: Terugkoppeling bij aanwezigheid van storing.

$Y(s)$:

$$Y = \frac{RP}{1 + RP}W + \frac{Z}{1 + RP}D \quad (5.6)$$

Voor de fout $e = w - y$ geldt

$$E = \frac{1}{1 + RP}W - \frac{Z}{1 + RP}D \quad (5.7)$$

Het volggedrag is de wijze waarop het systeem een wenswaardeverandering opvolgt bij afwezigheid van een storing ($d = 0$). De volgfout e_w

$$E_w = \frac{1}{1 + RP}W \quad (5.8)$$

is een maat voor de kwaliteit van het volggedrag. Het regelgedrag is de wijze waarop een optredende storing wordt weggeregeld bij een vaste wenswaarde ($w = 0$). Een maat voor het regelgedrag is de regelfout e_z :

$$E_z = -\frac{Z}{1 + RP}D \quad (5.9)$$

We bekijken e_w en e_z als het proces zijn (nieuwe) evenwichtstoestand bereikt heeft. Dit houdt in dat we lang genoeg wachten tot alle overgangsverschuiven verdwenen zijn. We maken gebruik van de limietstelling van de Laplace transformatie. Zij

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Dan geldt

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

Stel dat de wenswaarde plots een (eenheids)sprong maakt:

$$w(t) = 1 \quad \text{of} \quad W(s) = \frac{1}{s}$$

dan vinden we:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e_w(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_w(s) = \frac{1}{1 + R(0)P(0)} \quad (5.10)$$

De uitdrukking $R(0)P(0)$ stellen we gelijk aan K_p en noemen we de openkringversterking.

We vinden een blijvende volgfout:

$$E_w = \frac{1}{1 + K_p} \quad (5.11)$$

(5.11) wordt ook wel de positiefout genoemd. De positiefout heeft een eindige waarde als het product $R(s)P(s)$ geen integratoren bevat. Om (5.11) in dit geval te verkleinen moet K_p toenemen. Een andere mogelijkheid is het toevoegen van integratoren. Indien de regelaar bijvoorbeeld een I-actie bevat dan zal

$$\lim_{s \rightarrow 0} R(s)P(s) = \infty$$

zodat

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e_w = 0$$

Voor een lineair veranderende wenswaarde $w = t$ (dit is een sprong in de snelheid) vinden we met 1 enkele integrator opnieuw een blijvende fout. Immers:

$$W(s) = \frac{1}{s^2}$$

en dus

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e_w = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + RP} \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + RPs}$$

Stel

$$\lim_{s \rightarrow 0} RPs = K_v$$

dan vinden we

$$\lim_{e_w \rightarrow +\infty} = \frac{1}{K_v}$$

Het toevoegen van een tweede integrator zal de snelheidsfout e_w naar nul laten gaan. Voor een systeem dat twee integratoren bevat, vinden we een blijvende fout als de wenswaarde parabolisch varieert $w(t) = t^2$ (een sprong in de versnelling) en dus $W(s) = \frac{1}{s^3}$. Er geldt

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e_w(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + RP} \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{RPs^2}$$

Zij

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} RPs^2$$

dan vinden we

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e_w(t) = \frac{1}{K_a}$$

als versnellingsfout. De regelfout kan op dezelfde manier verholpen worden door het verhogen van de openkringversterking of door het toevoegen van integratoren.

Stel immers dat de storing plots een (eenheids)sprong maakt:

$$d(t) = 1 \quad \text{of} \quad D(s) = \frac{1}{s}$$

dan vinden we:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e_z(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_z(s) = \frac{-Z(0)}{1 + R(0)P(0)} \quad (5.12)$$

De uitdrukking $R(0)P(0)$ stellen we gelijk aan K_p en noemen we de openkringversterking.

We vinden een blijvende regelfout:

$$E_z = \frac{-Z(0)}{1 + K_p} \quad (5.13)$$

(5.13) wordt ook wel de positiefout genoemd. De positiefout heeft een eindige waarde als het product $R(s)P(s)$ geen integratoren bevat. Om (5.13) in dit geval te verkleinen moet K_p toenemen. Een andere mogelijkheid is het toevoegen van integratoren. Indien de regelaar bijvoorbeeld een I-actie bevat dan zal

$$\lim_{s \rightarrow 0} R(s)P(s) = \infty$$

zodat

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e_z = 0$$

Voor een lineair veranderende storingswaarde $d = t$ (dit is een sprong in de snelheid) vinden we met 1 enkele integrator opnieuw een blijvende fout. Immers:

$$D(s) = \frac{1}{s^2}$$

en dus

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e_z = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-Z}{1 + RP} \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-Z(0)}{s + RP s}$$

Stel

$$\lim_{s \rightarrow 0} RPs = K_v$$

dan vinden we

$$\lim_{e_z \rightarrow +\infty} = \frac{-Z(0)}{K_v}$$

Het toevoegen van een tweede integrator zal de snelheidsfout e_z naar nul laten gaan. Voor een systeem dat twee integratoren bevat, vinden we een blijvende fout als de storingswaarde parabolisch varieert $d(t) = t^2$ (een sprong in de versnelling) en dus $D(s) = \frac{1}{s^3}$. Er geldt

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e_z(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-Z(0)}{1 + RP} \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-Z(0)}{RPs^2}$$

Zij

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} RPs^2$$

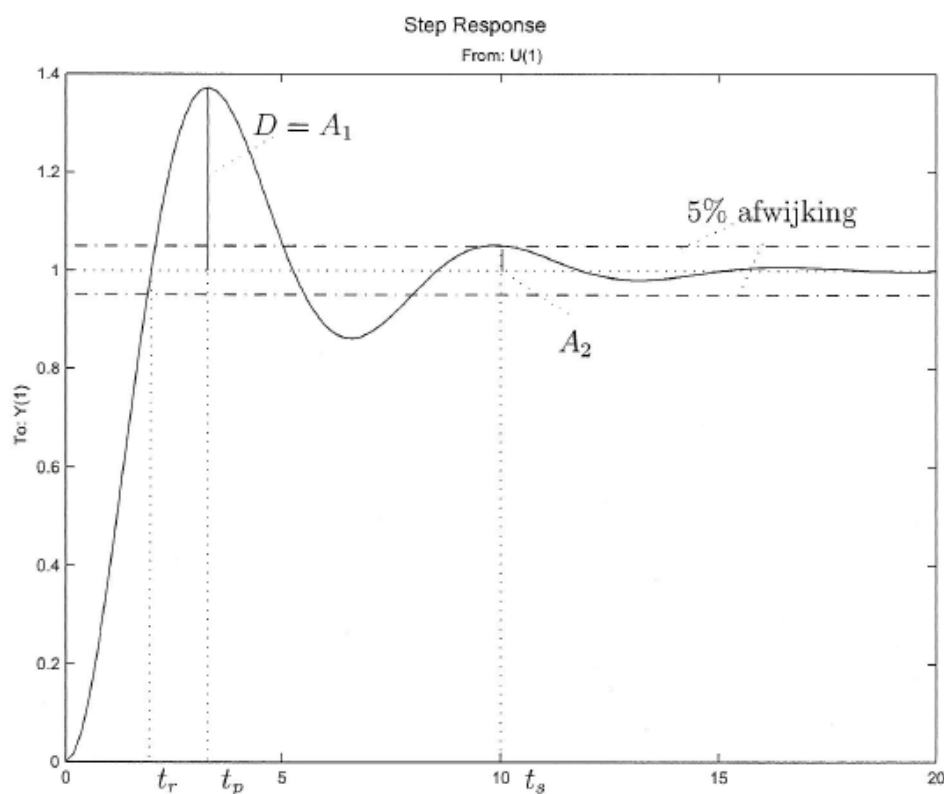
dan vinden we

$$\lim_{e_z \rightarrow +\infty} = \frac{-Z(0)}{K_a}$$

als versnellingsfout.

5.5.2 Transiënt gedrag

Tot hiertoe werden volgzaamheid en de onverstoordbaarheid bestudeerd. Deze hebben allen betrekking op de regelnauwkeurigheid bij het bereiken van de eindwaarde en worden verbeterd door een verhoging van de openkringversterking en/of het toevoegen van integratoren. Het verbeteren van het transiënt gedrag, veelal gekarakteriseerd door het stapantwoord, is eveneens een doelstelling van terugkoppeling. We definiëren een aantal grootheden die het verloop van een tijdsresponsie karakteriseren. We illustreren dit aan de hand van het stapantwoord van een ondergedempt tweede-ordesysteem (Figuur 5.10).



Figuur 5.10: Stapresponsie van een ondergedempt tweede-ordesysteem.

- De **stijgtijd** (rise time) t_r kunnen we voor een oscillerende responsie definiëren als de eerste maal dat de uitgang zijn eindwaarde bereikt. Algemener kan de stijgtijd gede-

finieerd worden als de tijd nodig om van 5% (10%) tot 95% (90%) van de eindwaarde te evolueren.

- De **uitslingertijd** (settling time) t_s is bij definitie de tijd nodig opdat de procesresponsie op 5% (2%) na zijn eindwaarde zou bereiken.
- Het **doorschot** (overshoot) D is het verschil tussen de maximale waarde van de uitgang en zijn eindwaarde.
- De **piektijd** (peak time) t_p is het tijdstip waarop het doorschot het grootst is.
- De **amplitudedempingsverhouding** is de verhouding tussen twee opeenvolgende pieken, verschoven over 1 periode, bijvoorbeeld $\frac{A_1}{A_2}$. Het logaritmisch decrement Λ is de natuurlijke logaritme van deze verhouding.

Elk van de bovengedefinieerde grootheden zijn aangeduid op Figuur 5.10. Hun verband met de dempingsfactor en de natuurlijke frequentie van een tweede-ordestelsel is terug te vinden in Tabel 5.1. Voor een eerste-ordeproces vinden we:

- Er is geen doorschot.
- De stijgtijd t_r van 10% tot 90 % van de eindwaarde bedraagt 2.2τ .
- De uitslingertijd t_s bedraagt 4τ voor een responsie die binnen de 2% afwijking van de eindwaarde blijft.

stijgtijd	$t_r \approx \frac{2.5}{\omega_n}$
uitslingertijd (5%)	$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}$
piektijd	$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$
doorschot	$D = \exp\left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$

Tabel 5.1: Karakterisatie van de stapresponsie

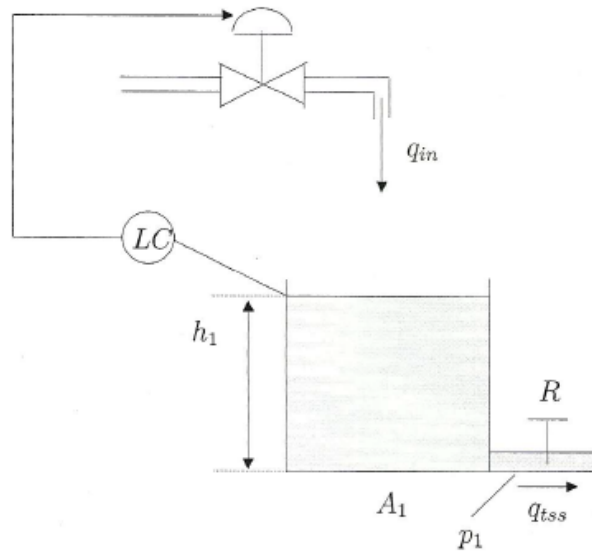
5.6 Toepassingen

5.6.1 Peilregeling in een vat

We beschouwen de regeling van het peil h_1 in een vat d.m.v. het debiet q_{in} . De grootheden h en q_{in} beschouwen we als afwijkingen van het evenwicht. Het eerste-ordeproces heeft als transfertfunctie $P(s)$:

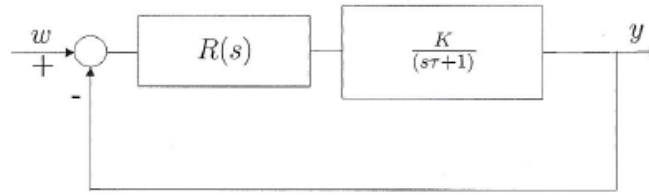
$$P(s) = \frac{h_1(s)}{q_{in}(s)} = \frac{K}{s\tau + 1} \quad (5.14)$$

Een keuze van de tijdsconstante τ en de versterkingsfactor K , d.w.z. een keuze van de dwarssectie A van het vat en de weerstand R van de leiding, domineert het stapantwoord volledig. Indien het overgangsverschijnsel niet snel genoeg uitsterft of de regimewaarde niet de correcte waarde is, meten we het vat in een regellus plaatsen zoals aangeduid op Figuur 5.11. Het verstellen van het debiet gebeurt via een regelbare klep die op zijn beurt het stuursignaal van de regelaar ontvangt. Figuur 5.12 toont het overeenkomstig blokschema.



Figuur 5.11: Peilregeling.

De geslotenkringtransfertfunctie geeft het verband tussen de wenswaarde w en het peil



Figuur 5.12: Blokschema van een peilregeling met P-regelaar.

$h = y$ in het Laplace domein:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{R(s) \frac{K}{s\tau+1}}{1 + R(s) \frac{K}{s\tau+1}} \quad (5.15)$$

We starten met een proportionele regeling, d.i. $R(s) = K_c$. Na wat rekenwerk vingen we voor $G(s)$:

$$G(s) = \frac{KK_c}{s\tau + 1 + KK_c} = \frac{\frac{KK_c}{1+KK_c}}{s \frac{\tau}{1+KK_c} + 1} \quad (5.16)$$

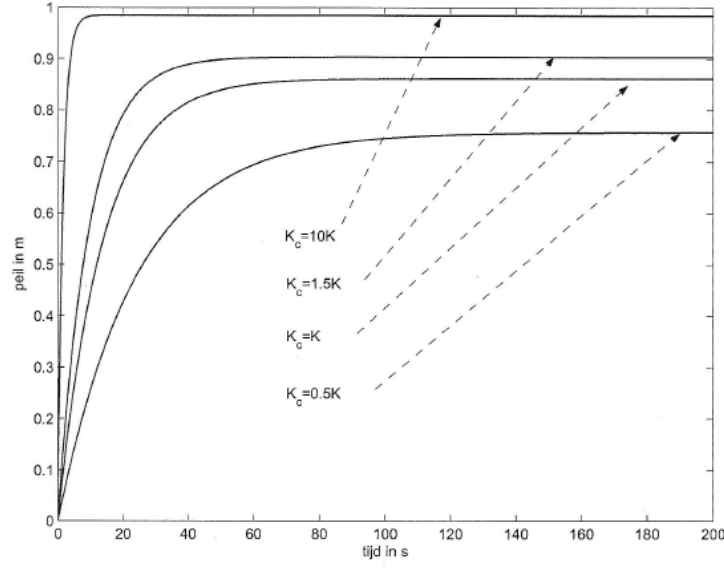
Merk op dat de geslotenkringtransfertfunctie opnieuw een eerste-ordedynamica is met een nieuwe tijdsconstante

$$\hat{\tau} \triangleq \frac{\tau}{1 + KK_c}$$

en een nieuwe statische versterkingsfactor

$$\hat{K} \triangleq \frac{KK_c}{1 + KK_c}$$

We kunnen het overgangsverschijnsel versnellen door de proportionele versterking K_c te verhogen. Indien de wenswaarde een sprong maakt, zal het peil in regime steeds een afwijking vertonen t.o.v. het gewenste peil, daar noch het proces noch de regelaar een integrator bevat. Naarmate K_c groter wordt zal de fout op de eindwaarde verkleinen. Figuur 5.13 illustreert het verloop van het peil voor een vat met $\tau = 100$ en $K = 2.5$ waarbij het gewenste debiet een eenheidssprong maakt. We bekijken nu het geval van een

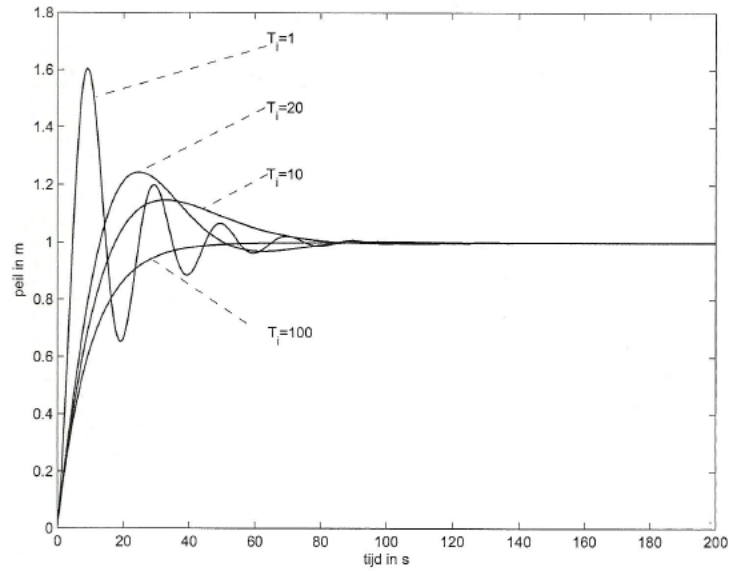


Figuur 5.13: Peilregeling met P-regelaar ($\tau = 100$, $K = 2.5$).

PI-regelaar. De geslotenkringtransfertoefunctie wordt:

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{K_c \left(1 + \frac{1}{sT_i}\right) \frac{K}{s\tau+1}}{1 + K_c \left(1 + \frac{1}{sT_i}\right) \frac{K}{s\tau+1}} \\
 &= \frac{KK_c \left(1 + \frac{1}{sT_i}\right)}{s(s\tau+1) + KK_c \left(1 + \frac{1}{sT_i}\right)} \\
 &= \frac{\frac{KK_c \left(1 + \frac{1}{sT_i}\right)}{\tau}}{s^2 + s \frac{(1+KK_c)}{\tau} + \frac{KK_c}{\tau T_i}}
 \end{aligned}$$

Het geslotenkringsysteem is van tweede orde. We bekijken een aantal simulaties. Het openkringsysteem heeft opnieuw de parameters $\tau = 100$ en $K = 2.5$. We kiezen $K_c = 4$ en nemen voor T_i achtereenvolgens de waarden $[\tau, \tau/5, \tau/10, \tau/100]$. We wijzigen de wenswaarde volgens een eenheidsstap. De correcte eindwaarde wordt bereikt. De oscillatie neemt toe naarmate T_i kleiner wordt. Dit kan aan de hand van ligging van de polen geverifieerd worden.



Figuur 5.14: Peilregeling met PI-regelaar T_i achtereenvolgens τ , $\tau/5$, $\tau/10$, $\tau/100$.

5.6.2 Stabilisering van het nationaal inkomen

We beschouwen een voorbeeld uit de macro-economie. We bestuderen het uitgavenbeleid van een regering om het nationaal inkomen op een gewenst peil te houden. Het nationaal inkomen staat voor het totaal aan goederen en diensten dat een land produceert. Het niveau van het nationaal inkomen wordt beïnvloed door de totale vraag naar goederen en diensten. Zij y_t het nationaal inkomen en v_t de totale vraag. Beide grootheden schrijven we als een som van een referentiewaarde (de evenwichtswaarden) en een afwijking:

$$y_t = y_{ref} + y \quad (5.17)$$

$$v_t = v_{ref} + v \quad (5.18)$$

Een afwijking van de referentiewaarde van de vraag leidt tot een afwijking van de referentiewaarde van het nationaal inkomen t.g.v. een wijziging in de productie. We drukken dit uit door volgend dynamisch verband tussen de afwijkingsveranderlijken:

$$\frac{dy}{dt} = \alpha(v - y) \quad (5.19)$$

met $\alpha > 0$ een reactiecoëfficiënt. De vraag kan geschreven worden als een fractie van het nationaal inkomen:

$$v = (1 - l)y \quad (5.20)$$

met $0 < l < 1$. Als we (5.20) invullen in (5.19) vinden we een eerste-ordedynamica:

$$\frac{dy}{dt} + \alpha ly = 0 \quad (5.21)$$

Beschouw een situatie waarbij de vraag verstoord wordt door een constante storing d , d.i.

$$v = (1 - l)y - d \quad (5.22)$$

(5.19) wordt nu:

$$\frac{dy}{dt} + \alpha ly = -\alpha d \quad (5.23)$$

in standaardvorm wordt dit

$$\frac{1}{\alpha l} \frac{dy}{dt} + y = -\frac{1}{l} d \quad (5.24)$$

Het verloop van y vinden we via het stapantwoord van een eerste-ordesysteem:

$$y = -\frac{1}{l}[1 - \exp(-\alpha lt)]d \quad (5.25)$$

Uit (5.25) volgt dat het nationaal inkomen blijft afwijken met een waarde $-\frac{d}{l}$ van de referentiewaarde t.g.v. de storing. Het weggeregelen van deze storing gebeurt d.m.v. een stabiliseringsbeleid u waarbij de overheid zijn uitgaven aanpast. Er zijn drie types beleid:

1. Proportioneel stabiliseringsbeleid (P-actie):

$$u_{opt} = -K_c y$$

2. Integrerend beleid (I-actie):

$$\frac{du_{opt}}{dt} = -\frac{K_c}{T_i} y$$

3. Differentiërend beleid (D-actie):

$$u_{opt} = -K_c T_d \frac{dy}{dt}$$

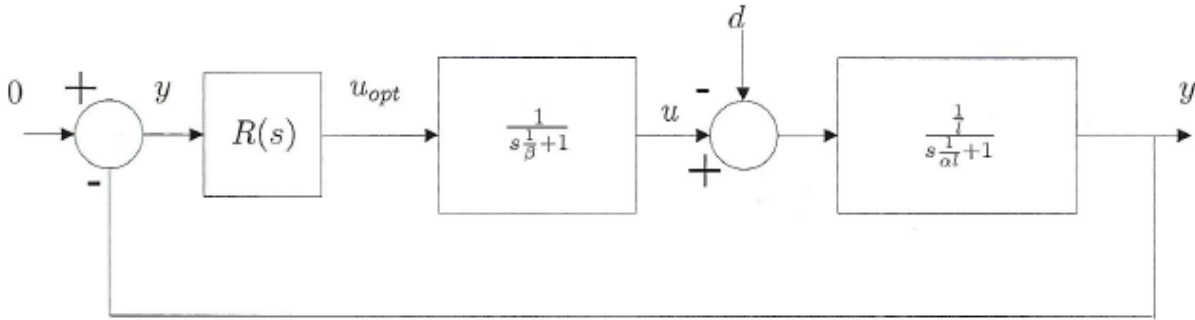
We hebben het stabilliseringsbeleid u geschreven als u_{opt} . u_{opt} is de theoretische waarde van het beleid dat de overheid zou willen halen. In werkelijkheid duurt het een zekere tijd eer de uitgaven u de theoretische waarde u_{opt} bereiken. Dit drukken we uit door volgend dynamisch verband:

$$\frac{du}{dt} = \beta(u_{opt} - u) \quad (5.26)$$

of

$$\frac{1}{\beta} \frac{du}{dt} + u = u_{opt} \quad (5.27)$$

We plaatsen dit alles in een blokschema en gaan meteen over naar het Laplace domein, d.i. elke blok wordt voorgesteld door zijn overdrachtsfunctie. We stellen de geslotenkring-



Figuur 5.15: Blokschema voor het dynamisch gedrag van het nationaal inkomen.

transfertfunctie op tussen het nationaal inkomen Y en de storing D . We definiëren

$$P_1 \triangleq \frac{\frac{1}{l}}{s\frac{1}{\alpha l} + 1}$$

en

$$P_2 \triangleq \frac{1}{s\frac{1}{\beta} + 1}$$

Er geldt achtereenvolgens:

$$\begin{aligned} Y &= P_1(U - D) \\ &= -P_1D + P_1P_2R(-Y) \end{aligned}$$

of

$$Y = \frac{P_1}{1 + P_1 P_2 R} D$$

We starten met het proportioneel beleid. De overdrachtsfunctie van de regelaar is dan een constante factor K_c :

$$R(s) = K_c$$

De geslotenkringoverdrachtsfunctie wordt nu:

$$G(s) = -\frac{\frac{\frac{1}{l}}{s^{\frac{1}{\alpha l}} + 1}}{1 + K_c \frac{1}{s^{\frac{1}{\beta}} + 1} \frac{\frac{1}{l}}{s^{\frac{1}{\alpha l}} + 1}} \quad (5.28)$$

We herleiden (5.28):

$$\begin{aligned} G(s) &= -\frac{\frac{1}{l} \left(s^{\frac{1}{\beta}} + 1 \right)}{\left(s^{\frac{1}{\beta}} + 1 \right) \left(s^{\frac{1}{\alpha l}} + 1 \right) + K_c \frac{1}{l}} \\ &= -\frac{\frac{1}{l} \left(s^{\frac{1}{\beta}} + 1 \right)}{s^2 \frac{1}{\beta \alpha l} + s \left(\frac{1}{\alpha l} + \frac{1}{\beta} \right) + 1 + K_c \frac{1}{l}} \\ &= -\frac{\beta \alpha \left(s^{\frac{1}{\beta}} + 1 \right)}{s^2 + s(\beta + \alpha l) + \left(1 + K_c \frac{1}{l} \right) \alpha \beta l} \end{aligned}$$

We bestuderen de noemer van de geslotenkringtransfertoefunctie en bekijken de analogie met het standaard tweede-ordesysteem. Er geldt:

$$\begin{aligned} \beta + \alpha l &= 2\zeta\omega_n \\ \left(1 + K_c \frac{1}{l} \right) \alpha \beta l &= \omega_n^2 \end{aligned}$$

We merken dat de proportionele versterking K_c enkel rechtstreeks de waarde ω_n beïnvloedt.

We kunnen het overgangverschijnsel volledig bepalen als we ζ en ω_n onafhankelijk van elkaar kunnen kiezen. Dit is hier niet het geval. Voor een constante storing d of $D = \frac{1}{s}$ vinden we als regimewaarde:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = -\frac{\frac{1}{l}}{1 + K_c \frac{1}{l}} \quad (5.29)$$

Zoals verwacht is er een blijvende afwijking t.g.v. de constante storing d omdat noch de processen (P_1, P_2) noch het beleid (de regelaar) een integrator bevatten.

We bekijken het effect van een gecombineerd proportioneel/differentiërend beleid. Het blok $R(s)$ in het blokschema Figuur 5.15 heeft als overdrachtsfunctie:

$$R(s) = K_c(1 + sT_d)$$

De geslotenkringoverdrachtsfunctie wordt achtereenvolgens:

$$\begin{aligned} G(s) &= -\frac{\frac{1}{l}}{s\frac{1}{\alpha l}+1} \frac{1}{1 + K_c(1 + sT_d)\frac{1}{s\frac{1}{\beta}+1}\frac{1}{s\frac{1}{\alpha l}+1}} \\ &= -\frac{\frac{1}{l}\left(s\frac{1}{\beta}+1\right)}{\left(s\frac{1}{\beta}+1\right)\left(s\frac{1}{\alpha l}+1\right) + K_c(1 + sT_d)\frac{1}{l}} \\ &= -\frac{\frac{1}{l}\left(s\frac{1}{\beta}+1\right)}{s^2\frac{1}{\alpha\beta l} + s\left(\frac{1}{\alpha l} + \frac{1}{\beta} + T_d K_c \frac{1}{l}\right) + 1 + K_c \frac{1}{l}} \\ &= -\frac{\beta\alpha\left(s\frac{1}{\beta}+1\right)}{s^2 + s(\beta + \alpha l + T_d K_c \alpha\beta) + K_c \alpha\beta + \alpha\beta l} \end{aligned}$$

Het geslotenkringsysteem blijft tweede orde. We bekijken het verband tussen de noemer van de geslotenkringtransferctunctie en de standaard parameters ζ en ω_n . Er geldt:

$$\beta + \alpha l + \alpha\beta K_c = 2\zeta\omega_n$$

$$(K_c + l)\alpha\beta = \omega_n^2$$

We kunnen het overgangsverschijnsel veel beter beïnvloeden daar de D-actie rechtstreeks op $\zeta\omega_n$ inwerkt en de proportionele versterking K_c op ω_n . We kunnen bijvoorbeeld eisen dat het overgangsverschijnsel kritisch gedempt wordt door $\zeta = 1$ te stellen en zo $T_d K_c$ te berekenen. De snelheid waarmee een kritisch gedempt systeem verval, volgt dan uit de keuze van ω_n . We bekijken opnieuw de regimewaarde van het nationaal inkomen y in het geval van een constante storing.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = -\frac{\frac{1}{l}}{1 + K_c \frac{1}{l}} \quad (5.30)$$

We vinden dezelfde waarde als bij de proportionele strategie. Indien we geen afwijking van het nationaal inkomen t.o.v. de referentiewaarde tolereren, dan moeten we een integrerende strategie bijvoegen. We bekijken het geval van een PI-regeling. De geslotenkringtransferta-functie wordt:

$$\begin{aligned} G(s) &= -\frac{\frac{\frac{1}{l}}{s^{\frac{1}{\alpha l}}+1}}{1 + K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) \frac{\frac{1}{l}}{s^{\frac{1}{\alpha l}}+1} \frac{1}{s^{\frac{1}{\beta}}+1}} \\ &= -\frac{\frac{1}{l} \left(s^{\frac{1}{\beta}} + 1\right) s}{s \left(s^{\frac{1}{\beta}} + 1\right) \left(s^{\frac{1}{\alpha l}} + 1\right) + K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) \frac{1}{l}} \end{aligned}$$

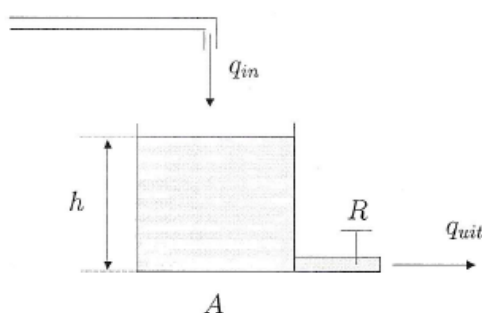
De orde van de geslotenkring wordt drie. We weten op basis van hoofdstuk 4 dat het gedrag uiteen zal vallen ofwel als drie eerste-ordeddynamica's ofwel als een eerste-ordeddynamica in combinatie met een ondergedempte tweede-ordeddynamica. De polen van het systeem kunnen we niet analytisch berekenen. Een goede keuze van de parameters T_i en K_c moet zorgen voor een snel uitstervend overgangsverschijnsel zonder oscillatie (reële polen). De aanwezigheid van de I-actie zorgt dat het nationaal inkomen steeds naar de referentiewaarde terugkeert bij een constante storing. Dit voorbeeld werd gebaseerd op hoofdstuk 17 uit 'Economic Dynamics', Giancarlo Gandaolfo, Springer-Verlag, Heidelberg 1997.

5.7 Oefeningen

5.7.1 P-regeling van een vat

Gegeven

We beschouwen een vloeistofpeil in een vat. Het verband tussen de hoogte h en het debiet



Figuur 5.16: Vloeistofpeil in een vat.

q_{in} wordt gegeven door een eerste-ordessysteem:

$$RA \frac{dh}{dt} + h = Rq_{in}$$

In standaardvorm wordt dit

$$\tau \frac{dh}{dt} + h = Kq_{in}$$

met $\tau = RA$ en $K = R$. Als numerieke waarden geldt:

$$\tau = 100 \text{ s} \quad K = 2.5$$

In evenwicht geldt:

$$h = 1.2 \text{ m} \quad q_{in} = q_{out} = 26 \text{ l/min}$$

Gevraagd

1. Geef de transfertfunctie $P(s)$ die het verband tussen $h(s)$ en $q_{in}(s)$ beschrijft.

2. We leggen een eenheidsstap aan het proces $P(s)$. Hoelang duurt het eer het proces 95 % van zijn nieuwe eindwaarde heeft bereikt?
3. De responsie van het proces in openkring is te traag. We plaatsen het proces in een regellus en kiezen voor een P-regelaar met versterking K_c . De hoogte h wordt gemeten met apparatuur waarvan de dynamica heel wat sneller is dan de dynamica van het proces zelf, d.w.z. $H(s) = 1$. Maak een schets van het blokdiagram.
4. geef de geslotenkringtransfertielfunctie.
5. Is het geslotenkringsysteem van dezelfde orde als het te regelen proces?
6. Waar is de invloed van de versterking van de P-regelaar merkbaar?
7. We leggen een eenheidssprong aan de wenswaarde r . We wensen een volgfout e_r , bij het bereiken van de eindwaarde, waarvoor geldt:

$$e_r < 20\%$$

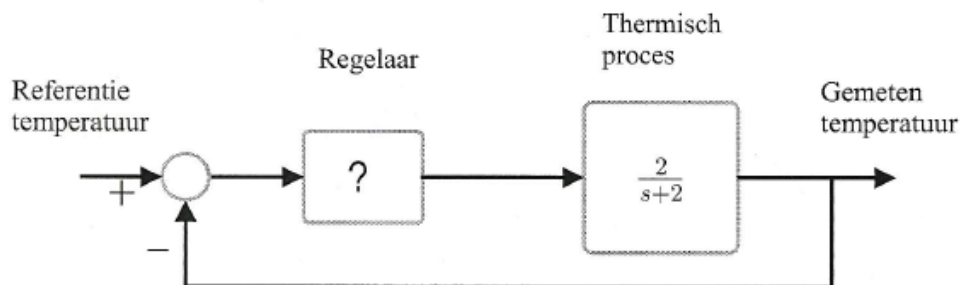
Wat is de minimale waarde K_c om aan deze specificatie te voldoen?

8. Wat gebeurt er met de volgfout indien K_c stijgt?
9. We voegen een I-actie aan de regelaar toe. Teken opnieuw het blokschema.
10. Geef de geslotenkringtransfertielfunctie.
11. Geef de uitdrukking van de geslotenkringpolen.
12. Indien de I-actie toeneemt, d.i. de waarde van T_i daalt, wat gebeurt er met de geslotenkringpolen?
13. Kan er voor een bepaalde keuze van K_c en T_i doorschot optreden? Zo ja, verklaar.
14. Indien $K_c = 4$ en $T_i = \tau$, verloopt het stapantwoord van h op een stap in de wenswaarde oscillerend of niet? Zelfde vraag indien $K_c = 4$ en $T_i = \frac{\tau}{5}$.
15. Kan een verkeerde keuze van T_i leiden tot een instabiel systeem?

5.7.2 Ontwerp van een regelaar

Ontwerp de meest eenvoudige regelaar voor het onderstaand thermisch proces zodat aan volgende specificaties voldaan wordt:

1. Er is geen blijvende fout bij de stapingang.
2. De dempingsfactor bedraagt 1.
3. De ongedempte natuurlijke frequentie bedraagt 4 rad/s.



Figuur 5.17: Blokschema van een thermisch proces.

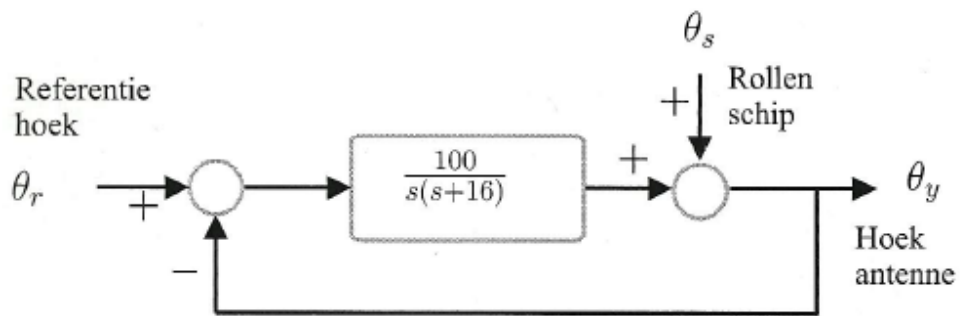
5.7.3 Foutberekening

Het blokschema van Figuur 5.18 stelt de positionering van een antenne op een schip voor. Het rollen van het schip (hoek θ_s) is een storing die we wensen weg te regelen zodat de hoek θ_y van de antenne gelijk is aan de referentiewaarde $\theta_r = 0$. Wat is de blijvende fout t.g.v. het rollen van het schip, d.i. $\theta_s = 0.1t$?

5.7.4 Responsie van een geslotenkring

Beschouw het blokschema Figuur 5.19. Neem $K_2 = 9$.

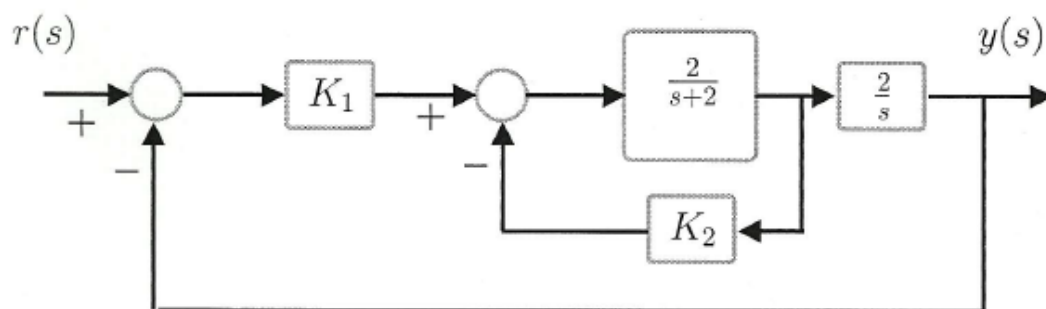
1. Wat is de maximale waarde van K_1 opdat



Figuur 5.18: Blokschema van een positieregeling.

- (a) er geen doorschot in de stapresponsie zou optreden?
- (b) er geen resonantiepiek in de frequentieresponsie zou optreden?

2. Wat is de 2% uitslingertijd indien $K_1 = 49$?



Figuur 5.19: Blokschema van een proces.

5.8 Oplossingen

Hoofdstuk 6

Uitleg bij de papers

6.1 Bullwhip-effect

De wijziging van de hoeveelheid voorraad die een retailer aanhoudt kunnen we als volgt formuleren:

$$\frac{dI}{dt} = R(t) - D(t) \quad (6.1)$$

Hierbij stelt $R(t)$ de ontvangen hoeveelheid op tijdstip t voor en $D(t)$ de gevraagde hoeveelheid op tijdstip t . Voor de rest van deze sectie nemen we aan dat:

- op $t = 0$ de hoeveelheid voorraad op het gewenste niveau I_d is
- de vraag $D(t)$ een sprong d maakt

Het bestelbeleid van de retailer is proportioneel en wordt gegeven door:

$$O(t) = \frac{I_d - I(t)}{T} \quad (6.2)$$

indien de huidige hoeveelheid in voorraad onder de gewenste hoeveelheid ligt. In de andere gevallen nemen we aan dat $O(t) = 0$. Figuur 1 van de paper toont de voorraadfluctuaties indien $O(t)$ niet terug naar 0 valt indien het gewenste voorraadniveau wordt bereikt. Concreet betekent dit dat de retailer indien de voorraad de gewenste hoeveelheid overtreft de bestelde goederen evenredig met het verschil $(I(t) - I_d)$ zal terugsturen naar de fabrikant.

Figuur 2 toont het meer realistische geval waarbij $O(t) = 0$ indien I_d overschreden wordt. Verder geldt:

$$R(t) = O(t - \tau) \quad (6.3)$$

De ontvangen hoeveelheid op tijdstip t werd eigenlijk besteld op tijdstip $t - \tau$, m.a.w. er zit een tijdsverschil op het bestellen en ontvangen van goederen. Het combineren van de drie voorgaande vergelijkingen levert ons het eerste-ordemodel dat we zullen gebruiken om het voorraadsysteem te analyseren:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{I_d - I(t - \tau)}{T} - d \quad (6.4)$$

Indien $t \leq \tau$ worden er nog geen goederen ontvangen, waardoor de voorraad zal dalen. Er geldt:

$$\frac{dI}{dt} = -d \Leftrightarrow I(t) = I_d - dt$$

Merk op dat omdat we verondersteld hebben dat $I(0) = I_d$ onze integratieconstante in dit geval dus gelijk is aan I_d en niet zomaar vrij te kiezen is. Voor $t \leq \tau$ vinden we nog:

$$O(t) = \frac{I_d - I_d + dt}{T} = \frac{dt}{T} \quad O(\tau) = \frac{d\tau}{T}$$

Hier zien we al dat het belangrijk zal zijn om $\frac{\tau}{T}$ niet te groot te laten worden indien we grote “inventory overshoots” willen voorkomen. Nu willen we de blijvende fout ten gevolge van ons bestelbeleid analyseren (we weten dat er een blijvende fout zal zijn omdat ons bestelbeleid louter proportioneel is, i.e. P-actie). Algemeen geldt:

$$\mathcal{L}\{f(t - \tau)\} = \exp(-s\tau)F(s) \quad (6.5)$$

We definiëren de fout als $e = I_d - I(t)$. Verder weten we ook dat

$$\frac{d(I(t) - I_d)}{dt} = \frac{dI(t)}{dt}$$

aangezien I_d een constante is. We kunnen onze eerste-orde differentiaalvergelijking dan als volgt herschrijven:

$$\frac{d(I(t) - I_d)}{dt} + \frac{I(t - \tau) - I_d}{T} = -d \quad (6.6)$$

Als we $I_d - I(t)$ hierin vervangen door e krijgen we:

$$\begin{aligned} -\frac{de}{dt} - \frac{e(t-\tau)}{T} &= -d \\ \frac{de}{dt} + \frac{e(t-\tau)}{T} &= d \end{aligned}$$

Laplace transformatie levert:

$$sE(s) + \frac{1}{T} \exp(-s\tau)E(s) = \frac{d}{s} \quad (6.7)$$

herschrijven levert:

$$E(s) = \frac{1}{s + \frac{\exp(-s\tau)}{T}} \frac{d}{s} \quad (6.8)$$

We zijn geïnteresseerd in de blijvende fout. Via de limietstelling van de Laplace transformatie krijgen we:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{s + \frac{\exp(-s\tau)}{T}} = dT \quad (6.9)$$

Hieruit volgt dat we een trade-off zullen moeten maken tussen de vermindering van het bullwhip-effect en de blijvende fout die we hebben door ons louter proportioneel bestelbeleid.

Het bullwhip-effect kunnen we op 2 manieren definiëren:

$$BW = \frac{O(\tau)}{d} = \frac{\tau}{T} \quad (6.10)$$

Hier hebben we de “output order rate” gedeeld door de “input order rate”. In plaats van naar de orderbalans te kijken kunnen we ook kijken naar de overschot of het tekort aan voorraad.

$$BW = \frac{\text{overshoot}}{\text{undershoot}} = \frac{I^* - I_d}{d\tau} \quad (6.11)$$

Op dit moment hebben we het bullwhip effect enkel bestudeert vanuit het standpunt van de retailer. We kunnen echter ook de situatie van de fabrikant schetsen. De balans vergelijking voor het voorraadpeil van de fabrikant is als volgt:

$$\frac{dI^m}{dt} = R^m(t) - S^m(t) \quad (6.12)$$

De wijziging in voorraad op t is het verschil tussen de ontvangen goederen op t en de verscheepte goederen op t . Opnieuw nemen we aan dat $I(0) = I_d^m$. De fabrikant verscheept op tijdstip t de goederen die op tijdstip $t - \tau$ besteld zijn door zijn klanten. Dit kunnen we als volgt uitdrukken:

$$S^m(t) = O^r(t - \tau_m) \quad (6.13)$$

We nemen aan dat ook het bestelbeleid van de fabrikant proportioneel is, i.e.:

$$O^m(t) = \frac{I_d^m - I^m(t)}{T^m} \quad (6.14)$$

Indien de voorraad onder het gewenste peil blijft en $O^m(t) = 0$ in de andere gevallen. Voor $t \leq \tau$ geldt:

$$\begin{aligned} \frac{dI^m}{dt} &= -S^m(t) \\ &= -O^r(t - \tau_m) \quad \text{met } O^r(t) = \frac{dt}{T} \\ &= -\frac{d(t - \tau_m)}{T} \end{aligned}$$

aangezien er voor $t \leq \tau$ nog geen goederen ontvangen worden.

$$I^m(t) = I_d^m + \int \frac{-d(t - \tau_m)}{T} dt \quad (6.15)$$

Opnieuw is I_d^m de integratieconstante daar we veronderstellen dat $I(0) = I_d^m$. Deze integraal lossen we op door substitutie: stel $u = t - \tau_m$ en $du = dt$. Dan vinden we:

$$I^m(t) = -\frac{d}{T} \frac{(t - \tau_m)^2}{2} \quad (6.16)$$

Waaruit volgt:

$$O^m(t) = \frac{d(t - \tau_m)^2}{TT^m} \quad (6.17)$$

We zien dus dat een sprong in de vraag bij de consument leidt tot een lineair bestelbeleid bij de retailer en een kwadratisch bestelbeleid bij de fabrikant. Dit geeft dus aanleiding tot de (soms grote) fluctuaties die we vatten onder de noemer van het bullwhip effect.

6.2 Competitie tussen websites

Op deze paper afdoende te begrijpen dienen we een alternatieve schrijfwijze in te voeren voor dynamische systemen. Tot hier toe gebruikten we altijd de ingang-uitgang notatie. Nu voeren we echter de volgende notatie in: Stel $x_1 = y$ en $x_2 = \dot{y}$. Het standaard tweede-orde model $\ddot{y} + 2\zeta\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = K\omega_n^2 u$ kunnen we dan schrijven als:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2\zeta\omega_n x_2 - \omega_n^2 x_1 + K\omega_n^2 u \end{cases} \quad (6.18)$$

Algemeen geldt:

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \quad (6.19)$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \quad (6.20)$$

In matrixnotatie krijgen we: $\dot{X} = Ax + Bu$ met:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Voor het standaardmodel geldt:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix}$$

$\dot{X} = Ax$ is de vrije responsie. In het Laplace domein geldt:

$$\begin{aligned} sX(s) - X(0) &= AX(s) \\ \Leftrightarrow (sI - A)X(s) &= X(0) \\ \Leftrightarrow X(s) &= (sI - A)^{-1}X(0) \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{1}{\det(sI - A)} \text{adj}(sI - A)X(0) \end{aligned}$$

Nu vragen we ons af hoe we een adjuncte matrix berekenen. Hiertoe voeren we enkele definities uit het opleidingsonderdeel Wiskunde I B opnieuw in. Zij A een $(n \times n)$, dan

definiëren we A_{ij} als de $(n-1) \times (n-1)$ deelmatrix verkregen door in A rij i en kolom j te schrappen. Het getal $M_{ij} = \det(A_{ij})$ noemen we de (i, j) -minor van A . Het getal $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}) = (-1)^{i+j} M_{ij}$ noemen we de (i, j) -cofactor van A . De (i, j) -minor en de (i, j) -cofactor zijn dus gelijk of tegengesteld aan elkaar. De formele definitie van de determinant van een $(n \times n)$ -matrix is dan ook:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A_{ik}) \quad \text{ontwikkelen volgens rij } i \quad (6.21)$$

$$= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \det(A_{kj}) \quad \text{ontwikkelen volgens kolom } j \quad (6.22)$$

en dit $\forall (i, j)$. Voor het standaardmodel van een tweede orde systeem geldt dus:

$$\text{adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} s + 2\zeta\omega_n & 1 \\ -\omega_n^2 & s \end{bmatrix}$$

algemeen

$$\frac{df_i}{dt} = \underbrace{\alpha_i f_i}_{\text{groei}} \underbrace{(\beta_i - f_i)}_{\text{saturatie}} - \underbrace{\sum_{i \neq j} \gamma_{ij} f_i f_j}_{\text{competitie}} \quad (6.23)$$

met $\alpha_i \geq 0$, $0 \leq \beta_i \leq 1$ en $\gamma_{ij} \geq 0$. In het geval we slechts 2 sites bestuderen krijgen we:

$$\frac{df_1}{dt} = \alpha_1 f_1 (\beta_1 - f_1) - \gamma_{12} f_1 f_2 \quad (6.24)$$

$$\frac{df_2}{dt} = \alpha_2 f_2 (\beta_2 - f_2) - \gamma_{21} f_2 f_1 \quad (6.25)$$

paragraaf 3

We bestuderen eerst het meest eenvoudige geval: $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$ en $\gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma$. Vergelijkingen (6.24) en (6.25) reduceren tot:

$$\frac{df_1}{dt} = f_1(1 - f_1 - \gamma f_2) \quad (6.26)$$

$$\frac{df_2}{dt} = f_2(1 - f_2 - \gamma f_1) \quad (6.27)$$

Om de evenwichtspunten van ons model te bepalen moeten we de stationaire punten van bovenstaand stelsel eerste-orde afgeleiden bepalen. Daartoe stellen we:

$$\begin{aligned}\frac{df_1}{dt} &= 0 \\ \frac{df_2}{dt} &= 0\end{aligned}$$

Op het zicht kunnen we onmiddellijk drie evenwichtspunten bepalen, namelijk: $(0, 0)$, $(0, 1)$ en $(1, 0)$. Het vierde evenwichtspunt vinden we door het volgende stelsel op te lossen:

$$1 - f_1 - \gamma f_2 = 0 \quad (6.28)$$

$$1 - f_2 - \gamma f_1 = 0 \quad (6.29)$$

Vergelijking (6.28) vermenigvuldigen met γ en vergelijking (6.29) lid aan lid aftrekken van vergelijking (6.28) geeft ons het vierde evenwichtspunt, namelijk: $\left(\frac{1}{1+\gamma}, \frac{1}{1+\gamma}\right)$. We hebben dus de evenwichtspunten bepaald van een niet-lineair systeem. Dit betekent dat we de in de cursus geziene technieken voor lineaire tijdsinvariante systemen niet zomaar mogen toepassen op dit model. In een voldoende klein gebied rond de evenwichtspunten van ons model kunnen we echter wel een lineaire benadering toepassen. Dit kunnen we doen d.m.v. een Taylorreeksbenadering. Daartoe definiëren we eerst:

$$\dot{f}_1 = f_1(1 - f_1) - \gamma f_1 f_2 \triangleq g_1(f_1, f_2) \quad (6.30)$$

$$\dot{f}_2 = f_2(1 - f_2) - \gamma f_1 f_2 \triangleq g_2(f_1, f_2) \quad (6.31)$$

$g_1(f_1, f_2)$ ontwikkelen in een Taylorreeks levert:

$$g_1(f_1, f_2) = \underbrace{g_1(f_1^{ev}, f_2^{ev})}_{=0} + \left. \frac{\partial g_1}{\partial f_1} \right|_{f_1=f_1^{ev}} (f_1 - f_1^{ev}) + \left. \frac{\partial g_1}{\partial f_2} \right|_{f_2=f_2^{ev}} (f_2 - f_2^{ev}) + \dots \quad (6.32)$$

$$\approx \left. \frac{\partial g_1}{\partial f_1} \right|_{f_1=f_1^{ev}} \delta f_1 + \left. \frac{\partial g_1}{\partial f_2} \right|_{f_2=f_2^{ev}} \delta f_2 \quad (6.33)$$

$g_2(f_1, f_2)$ ontwikkelen in een Taylorreeks levert:

$$g_2(f_1, f_2) = \underbrace{g_2(f_1^{ev}, f_2^{ev})}_{=0} + \left. \frac{\partial g_2}{\partial f_1} \right|_{f_1=f_1^{ev}} (f_1 - f_1^{ev}) + \left. \frac{\partial g_2}{\partial f_2} \right|_{f_2=f_2^{ev}} (f_2 - f_2^{ev}) + \dots \quad (6.34)$$

$$\approx \left. \frac{\partial g_2}{\partial f_1} \right|_{f_1=f_1^{ev}} \delta f_1 + \left. \frac{\partial g_2}{\partial f_2} \right|_{f_2=f_2^{ev}} \delta f_2 \quad (6.35)$$

De partiële afgeleiden van g_1 zijn:

$$\frac{\partial g_1}{\partial f_1} = 1 - 2f_1 - \gamma f_2 \quad (6.36)$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial f_2} = -\gamma f_1 \quad (6.37)$$

De partiële afgeleiden van g_2 zijn:

$$\frac{\partial g_2}{\partial f_1} = -\gamma f_2 \quad (6.38)$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial f_2} = 1 - 2f_2 - \gamma f_1 \quad (6.39)$$

We kunnen dus schrijven:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 - 2f_1 - \gamma f_2 & -\gamma f_1 \\ -\gamma f_2 & 1 - 2f_2 - \gamma f_1 \end{bmatrix}$$

waarbij $\mathbf{J}$ de jacobiaan voorstelt. Aangezien er geldt dat:

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{dt} &= \frac{d(f_1 - f_1^{ev})}{dt} = \frac{d(\delta f_1)}{dt} \\ \frac{df_2}{dt} &= \frac{d(f_2 - f_2^{ev})}{dt} = \frac{d(\delta f_2)}{dt} \end{aligned}$$

kunnen we ons model als volgt in matrixvorm noteren:

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{f}_1 \\ \delta \dot{f}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{J}|_{f_1^{ev} f_2^{ev}} \begin{bmatrix} \delta f_1 \\ \delta f_2 \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

Om de stabiliteit van de evenwichtspunten te achterhalen moeten we nu nog de eigenwaarden van de jacobiaan berekenen. Deze eigenwaarden vinden we door de volgende vergelijking op te lossen:

$$\det(sI - \mathbf{J}(f_1^{ev} f_2^{ev})) = 0 \quad (6.41)$$

- Voor het evenwichtspunt $(0, 0)$ krijgen we:

$$\mathbf{J}(0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - \mathbf{J}(0,0)) = \begin{vmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s-1 \end{vmatrix} = (s-1)^2 = 0 \Leftrightarrow s = 1 = \lambda_1 = \lambda_2$$

Aangezien we een positieve eigenwaarde hebben met dubbele multipliciteit zal het punt $(0,0)$ nooit een stabiel evenwicht zijn.

- Voor het evenwichtspunt $(0,1)$ krijgen we:

$$\mathbf{J}(0,1) = \begin{bmatrix} 1-\gamma & 0 \\ -\gamma & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - \mathbf{J}(0,1)) = \begin{vmatrix} s-1+\gamma & 0 \\ -\gamma & s+1 \end{vmatrix} = (s-(1-\gamma))(s+1) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 1-\gamma$$

Het punt $(0,1)$ zal enkel een stabiel evenwichtspunt zijn als beide eigenwaarden negatief zijn. Hieraan is voldaan indien $\gamma > 1$. De economische interpretatie hiervan is dat $(0,1)$ enkel een stabiel evenwichtspunt zal zijn als er sterke competitie heerst.

- Wegens de symmetrie van het probleem zal exact hetzelfde gelden voor het evenwichtspunt $(1,0)$:

$$\mathbf{J}(1,0) = \begin{bmatrix} -1 & -\gamma \\ 0 & 1-\gamma \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - \mathbf{J}(1,0)) = \begin{vmatrix} s+1 & -\gamma \\ 0 & s-1+\gamma \end{vmatrix} = (s-(1-\gamma))(s+1) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 1-\gamma$$

Het punt $(1,0)$ zal enkel een stabiel evenwichtspunt zijn als beide eigenwaarden negatief zijn. Hieraan is voldaan indien $\gamma > 1$. De economische interpretatie hiervan is dat $(1,0)$ enkel een stabiel evenwichtspunt zal zijn als er sterke competitie heerst. Welk evenwicht $((0,1)$ of $(1,0))$ stabiel zal zijn in een situatie van sterke competitie hangt af van de begintoestand van het systeem, namelijk van de fracties f_1 en f_2 .

- Voor het evenwichtspunt $\left(\frac{1}{1+\gamma}, \frac{1}{1+\gamma}\right)$:

$$\mathbf{J}\left(\frac{1}{1+\gamma}, \frac{1}{1+\gamma}\right) = \begin{bmatrix} \frac{-1}{1+\gamma} & \frac{-\gamma}{1+\gamma} \\ \frac{-\gamma}{1+\gamma} & \frac{-1}{1+\gamma} \end{bmatrix}$$

$$\det \left(sI - \mathbf{J} \left(\frac{1}{1+\gamma}, \frac{1}{1+\gamma} \right) \right) = \begin{vmatrix} s + \frac{1}{1+\gamma} & \frac{\gamma}{1+\gamma} \\ \frac{\gamma}{1+\gamma} & s + \frac{1}{1+\gamma} \end{vmatrix} = \left(s + \frac{1}{1+\gamma} \right)^2 - \left(\frac{\gamma}{1+\gamma} \right)^2 = 0$$

Uitwerken van bovenstaande vergelijking levert:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\gamma - 1}{1 + \gamma} \\ \lambda_2 &= \frac{-\gamma - 1}{1 + \gamma} \end{aligned}$$

Het punt $\left(\frac{1}{1+\gamma}, \frac{1}{1+\gamma} \right)$ zal enkel een stabiel evenwichtspunt zijn als beide eigenwaarden negatief zijn. Hieraan is voldaan indien $\gamma < 1$. De economische interpretatie hiervan is dat $\left(\frac{1}{1+\gamma}, \frac{1}{1+\gamma} \right)$ enkel een stabiel evenwichtspunt zal zijn als er zwakke competitie heerst.

paragraaf 4

Nu bekijken we het model met 2 websites in zijn meest algemene vorm.

$$\frac{df_1}{dt} = f_1(\alpha_1(\beta_1 - f_1) - \gamma_{12}f_2) \quad (6.42)$$

$$\frac{df_2}{dt} = f_2(\alpha_2(\beta_2 - f_2) - \gamma_{21}f_1) \quad (6.43)$$

Om de evenwichtspunten van ons model te bepalen moeten we de stationaire punten van bovenstaand stelsel eerste-orde afgeleiden bepalen. Daartoe stellen we:

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{dt} &= 0 \\ \frac{df_2}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Op het zicht kunnen we onmiddellijk drie evenwichtspunten bepalen, namelijk: $(0, 0)$, $(0, \beta_2)$ en $(\beta_1, 0)$. Het vierde evenwichtspunt vinden we door het volgende stelsel op te lossen:

$$\alpha_1\beta_1 - \alpha_1f_1 - \gamma_{12}f_2 = 0 \quad (6.44)$$

$$\alpha_2\beta_2 - \alpha_2f_2 - \gamma_{21}f_1 = 0 \quad (6.45)$$

Vergelijking (6.45) vermenigvuldigen met γ_{12} , vergelijking (6.44) vermenigvuldigen met α_2 en vergelijking (6.45) lid aan lid aftrekken van vergelijking (6.44) geeft ons het vierde evenwichtspunt, namelijk: $\left(\frac{\alpha_2(\alpha_1\beta_1 - \beta_2\gamma_{12})}{\alpha_2\alpha_1 - \gamma_{12}\gamma_{21}}, \frac{\alpha_1(\alpha_2\beta_2 - \beta_1\gamma_{21})}{\alpha_2\alpha_1 - \gamma_{12}\gamma_{21}} \right)$. We hebben dus de evenwichtspunten bepaald van een niet-lineair systeem. Dit betekent dat we de in de cursus geziene technieken voor lineaire tijdsinvariante systemen niet zomaar mogen toepassen op dit model. In een voldoende klein gebied rond de evenwichtspunten van ons model kunnen we echter wel een lineaire benadering toepassen. Dit kunnen we doen d.m.v. een Taylorreeksbenadering. Daartoe definiëren we eerst:

$$\dot{f}_1 = f_1(\alpha_1(\beta_1 - f_1) - \gamma_{12}f_2) \triangleq g_1(f_1, f_2) \quad (6.46)$$

$$\dot{f}_2 = f_2(\alpha_2(\beta_2 - f_2) - \gamma_{21}f_1) \triangleq g_2(f_1, f_2) \quad (6.47)$$

$g_1(f_1, f_2)$ ontwikkelen in een Taylorreeks levert:

$$g_1(f_1, f_2) = \underbrace{g_1(f_1^{ev}, f_2^{ev})}_{=0} + \left. \frac{\partial g_1}{\partial f_1} \right|_{f_1=f_1^{ev}} (f_1 - f_1^{ev}) + \left. \frac{\partial g_1}{\partial f_2} \right|_{f_2=f_2^{ev}} (f_2 - f_2^{ev}) + \dots \quad (6.48)$$

$$\approx \left. \frac{\partial g_1}{\partial f_1} \right|_{f_1=f_1^{ev}} \delta f_1 + \left. \frac{\partial g_1}{\partial f_2} \right|_{f_2=f_2^{ev}} \delta f_2 \quad (6.49)$$

$g_2(f_1, f_2)$ ontwikkelen in een Taylorreeks levert:

$$g_2(f_1, f_2) = \underbrace{g_2(f_1^{ev}, f_2^{ev})}_{=0} + \left. \frac{\partial g_2}{\partial f_1} \right|_{f_1=f_1^{ev}} (f_1 - f_1^{ev}) + \left. \frac{\partial g_2}{\partial f_2} \right|_{f_2=f_2^{ev}} (f_2 - f_2^{ev}) + \dots \quad (6.50)$$

$$\approx \left. \frac{\partial g_2}{\partial f_1} \right|_{f_1=f_1^{ev}} \delta f_1 + \left. \frac{\partial g_2}{\partial f_2} \right|_{f_2=f_2^{ev}} \delta f_2 \quad (6.51)$$

De partiële afgeleiden van g_1 zijn:

$$\frac{\partial g_1}{\partial f_1} = \alpha_1\beta_1 - 2f_1\alpha_1 - \gamma_{12}f_2 \quad (6.52)$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial f_2} = -\gamma_{12}f_1 \quad (6.53)$$

De partiële afgeleiden van g_2 zijn:

$$\frac{\partial g_2}{\partial f_1} = -\gamma_{21}f_2 \quad (6.54)$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial f_2} = \alpha_2\beta_2 - 2\alpha_2f_2 - \gamma_{21}f_1 \quad (6.55)$$

We kunnen dus schrijven:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \alpha_1\beta_1 - 2f_1\alpha_1 - \gamma_{12}f_2 & -\gamma_{12}f_1 \\ -\gamma_{21}f_2 & \alpha_2\beta_2 - 2\alpha_2f_2 - \gamma_{21}f_1 \end{bmatrix}$$

waarbij $\mathbf{J}$ de jacobiaan voorstelt. Aangezien er geldt dat:

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{dt} &= \frac{d(f_1 - f_1^{ev})}{dt} = \frac{d(\delta f_1)}{dt} \\ \frac{df_2}{dt} &= \frac{d(f_2 - f_2^{ev})}{dt} = \frac{d(\delta f_2)}{dt} \end{aligned}$$

kunnen we ons model als volgt in matrixvorm noteren:

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{f}_1 \\ \delta \dot{f}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{J}|_{f_1^{ev} f_2^{ev}} \begin{bmatrix} \delta f_1 \\ \delta f_2 \end{bmatrix} \quad (6.56)$$

Om de stabiliteit van de evenwichtspunten te achterhalen moeten we nu nog de eigenwaarden van de jacobiaan berekenen. Deze eigenwaarden vinden we door de volgende vergelijking op te lossen:

$$\det(sI - \mathbf{J}(f_1^{ev} f_2^{ev})) = 0 \quad (6.57)$$

- Voor het evenwichtspunt $(0, 0)$ krijgen we:

$$\mathbf{J}(0, 0) = \begin{bmatrix} \alpha_1\beta_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2\beta_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - \mathbf{J}(0, 0)) = \begin{vmatrix} s - \alpha_1\beta_1 & 0 \\ 0 & s - \alpha_2\beta_2 \end{vmatrix} = (s - \alpha_1\beta_1)(s - \alpha_2\beta_2) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \alpha_1\beta_1 \quad \lambda_2 = \alpha_2\beta_2$$

Aangezien we twee positieve eigenwaarde vinden zal het punt $(0, 0)$ nooit een stabiel evenwicht zijn.

- Voor het evenwichtspunt $(0, \beta_2)$ krijgen we:

$$\mathbf{J}(0, \beta_2) = \begin{bmatrix} \alpha_1\beta_1 - \gamma_{12}\beta_2 & 0 \\ -\gamma_{21}\beta_2 & -\alpha_2\beta_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - \mathbf{J}(0, \beta_2)) = \begin{vmatrix} s - (\alpha_1\beta_1 - \gamma_{12}\beta_2) & 0 \\ \gamma_{21}\beta_2 & s + \alpha_2\beta_2 \end{vmatrix}$$

Hieruit volgt dat het punt $(0, \beta_2)$ enkel een stabiel evenwichtspunt zal zijn als beide eigenwaarden negatief zijn. Hieraan is voldaan indien $\alpha_1\beta_1 - \gamma_{12}\beta_2 < 0$ of dus $\gamma_{12} > \frac{\alpha_1\beta_1}{\beta_2}$. Opgelet dit staat juist in de tabel in de paper **maar in de tekst werden de gevallen $(0, \beta_2)$ en $(\beta_1, 0)$ omgewisseld.**

- Voor het evenwichtspunt $(\beta_1, 0)$ geldt:

$$\mathbf{J}(\beta_1, 0) = \begin{bmatrix} -\alpha_1\beta_1 & -\gamma_{12}\beta_1 \\ 0 & \alpha_2\beta_2 - \gamma_{21}\beta_1 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - \mathbf{J}(\beta_1, 0)) = \begin{vmatrix} s - (-\alpha_1\beta_1) & \gamma_{12}\beta_1 \\ 0 & s - (\alpha_2\beta_2 - \gamma_{21}\beta_1) \end{vmatrix}$$

Het punt $(\beta_1, 0)$ zal bijgevolg enkel een stabiel evenwichtspunt zijn als beide eigenwaarden negatief zijn. Hieraan is voldaan indien $\alpha_2\beta_2 - \gamma_{21}\beta_1 < 0$ of dus $\gamma_{21} > \frac{\alpha_2\beta_2}{\beta_1}$. Opgelet dit staat juist in de tabel in de paper **maar in de tekst werden de gevallen $(0, \beta_2)$ en $(\beta_1, 0)$ omgewisseld.**

- De analytische afleiding van de stabiliteit van het vierde evenwichtspunt zou ons te ver leiden. Het volstaat te weten dat dit evenwichtspunt stabiel is indien $\gamma_1\gamma_2 < 1$ (zie paper). Dit komt overeen met het geval van zwakke competitie.

Bijlage A

Laplace transformatie

A.1 Definitie van de Laplace transformatie

De Laplace transformatie is een transformatie voor continue systemen waarbij een tijdsfunctie omgezet wordt naar een functie van een complexe, frequentie-afhankelijke veranderlijke. Dergelijke transformatie laat toe op een eenvoudige manier het transiënt gedrag en het regime gedrag van een lineair systeem te bestuderen. De wiskundige definitie is als volgt: Beschouw een functie van de tijd $f(t)$ met de eigenschap

$$f(t) = 0 \quad \text{voor} \quad t < 0$$

Met $f(t)$ laten we een functie $F(s)$ van de complexe veranderlijke $s = \sigma + j\omega$ overeenstemmen:

$$F(s) = \mathcal{L}f(t)$$

$F(s)$ noemen we de Laplace getransformeerde van $f(t)$. $\mathcal{L}$ is de Laplace operator. $f(t)$ is de inverse Laplace getransformeerde van $F(s)$:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}F(s)$$

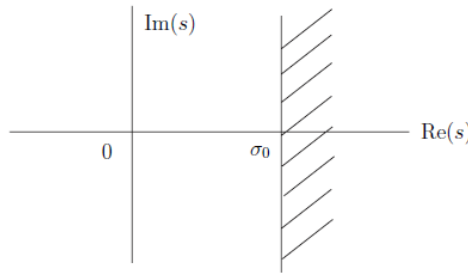
De correspondentie $f(t) \leftrightarrow F(s)$ is één-éénduidig, met als definitieformule

$$F(s) \triangleq \int_0^{+\infty} \exp(-st)f(t)dt$$

Over het algemeen zal deze integraal convergeren wanneer $\Re(s) = \sigma$ voldoende groot is. $F(s)$ is gedefinieerd voor alle punten s in het complexe vlak waarvoor

$$\Re(s) = \sigma > \sigma_0$$

(zie Figuur A.1). De waarde van σ_0 hangt af van de functie $f(t)$. Indien bijvoorbeeld $f(t)$ begrensd is ($|f(t)| \leq m$, m reëel en positief), dan geldt:



Figuur A.1: Convergentie van $F(s)$.

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{+\infty} \exp[-(\sigma + j\omega)t] f(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \exp(-\sigma t) f(t) \underbrace{[\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)]}_{\exp(-j\omega t)} dt \end{aligned}$$

nu geldt er:

$$\begin{aligned} |\Re F(s)| &\leq m \int_0^{+\infty} \exp(-\sigma t) dt \\ |\Im F(s)| &\leq m \int_0^{+\infty} \exp(-\sigma t) dt \end{aligned}$$

Waaruit volgt dat zowel $|\Re F(s)|$ als $|\Im F(s)|$ convergeren voor $\sigma > \sigma_0 = 0$. Men kan aantonen dat $\sigma_0 = 0$ voor veel functies zoals $f(t) = 1, \sin(\omega t), \cos(\omega t), t, t^n, t \cos(\omega t), \dots$ ($t > 0$) terwijl $\sigma_0 = a$ voor functies zoals $f(t) = \exp(at), t \exp(at), \exp(at) \cos(\omega t), t \exp(at) \cos(\omega t), \dots$ ($t > 0$).

A.2 Eigenschappen van de Laplace transformatie

A.2.1 Lineaire superpositie

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}f(t) + b\mathcal{L}g(t)$$

Bewijs:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] &\triangleq \int_0^{+\infty} \exp(-st)[af(t) + bg(t)]dt \\ &= a \int_0^{+\infty} \exp(-st)f(t)dt + b \int_0^{+\infty} \exp(-st)g(t)dt \\ &= a\mathcal{L}f(t) + b\mathcal{L}g(t)\end{aligned}$$

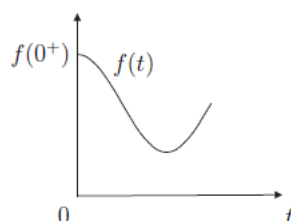
A.2.2 Afleiding

$$\mathcal{L}\frac{df(t)}{dt} = s\mathcal{L}f(t) - f(0^+)$$

met (zie Figuur A.2)

$$f(0^+) \triangleq \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$$

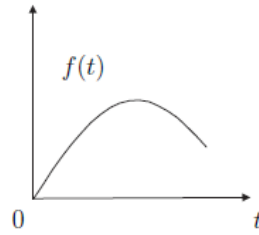
Indien $f(0^+) = 0$ (zie Figuur A.3) dan is



Figuur A.2: Algemene grafiek van $f(t)$

$$\mathcal{L}\frac{df(t)}{dt} = s\mathcal{L}f(t)$$

Bewijs:



Figuur A.3: grafiek van $f(t)$ met $f(0^+) = 0$.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} \frac{df(t)}{dt} &\triangleq \int_0^{+\infty} \exp(-st) \frac{df(t)}{dt} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} \exp(-st) df(t) \\
 &\stackrel{(\star)}{=} [\exp(-st)f(t)]_{t=0}^{t=+\infty} + \int_0^{+\infty} s f(t) \exp(-st) dt \\
 &= s \mathcal{L} f(t) - f(0^+)
 \end{aligned}$$

($\star$) deze overgang werd bekomen door middel van partiële integratie. We hebben:

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{\exp(-st)}_u \underbrace{df(t)}_{dv}$$

De algemene formule voor partiële integratie is:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Toepassen van deze formule levert:

$$\begin{aligned}
 \int \exp(-st) df(t) &= \exp(-st)f(t) - \int f(t)[-s \exp(-st)dt] \\
 &= \exp(-st)f(t) + s \int f(t) \exp(-st) dt
 \end{aligned}$$

Invoeren van de integratiegrenzen levert:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} \exp(-st) df(t) &= [\exp(-st)f(t)]_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} \exp(-st)f(t) dt \\
 &= \left[\lim_{t \rightarrow +\infty} [\exp(-st)f(t)] - f(0^+) \right] + s \int_0^{+\infty} \exp(-st)f(t) dt \\
 &= s \mathcal{L} f(t) - f(0^+)
 \end{aligned}$$

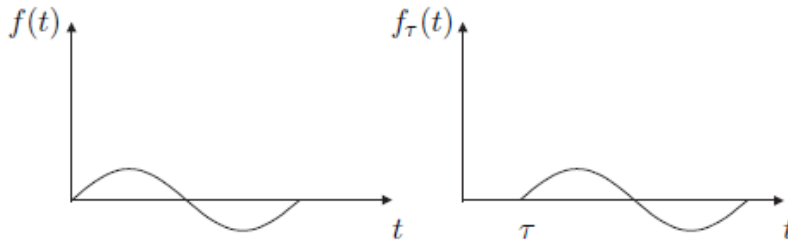
Hierbij hebben we verondersteld dat $f(t)$ naar boven en onder begrensd is op $+\infty$. De bovenstaande formule kunnen we veralgemenen naar afgeleiden van een hogere orde.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} &= \mathcal{L} \frac{d}{dt} \left(\frac{df(t)}{dt} \right) \\
 &= s \mathcal{L} \frac{df(t)}{dt} - \frac{df(0^+)}{dt} \\
 &= s[s \mathcal{L} f(t) - f(0^+)] - \frac{df(0^+)}{dt} \\
 &= s^2 \mathcal{L} f(t) - s f(0^+) - \frac{df(0^+)}{dt}
 \end{aligned}$$

Analoog voor $\mathcal{L} \frac{d^3 f}{dt^3}$ enz.

A.2.3 Tijdsvertraging

Zij $f_\tau(t) = f(t - \tau)$ de functie afgeleid van $f(t)$ door aan $f(t)$ een tijdsvertraging $\tau > 0$ op te leggen (zie Figuur A.4). Er geldt:



Figuur A.4: Tijdsvertraging.

$$\mathcal{L} f_\tau(t) = \exp(-s\tau) \mathcal{L} f(t)$$

Merk op dat $\tau > 0$ moet zijn om te verzekeren dat $f_\tau = 0$ voor $t < 0$. Bewijs:

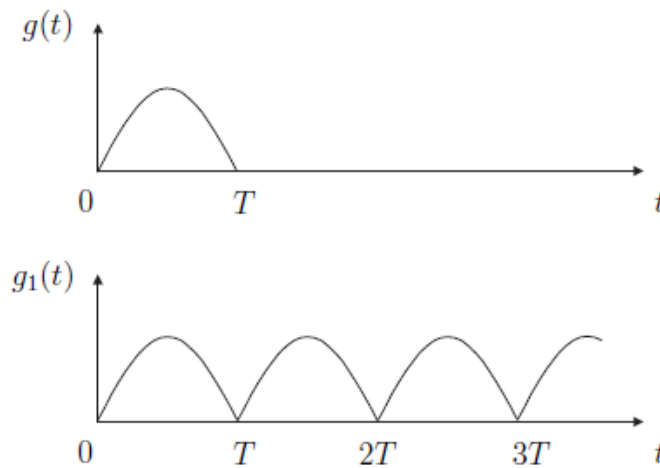
$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} f_\tau(t) &\triangleq \int_0^{+\infty} \exp(-st) f_\tau(t) dt \\
 &= \exp(-s\tau) \int_0^{+\infty} \exp[-s(t - \tau)] f_\tau(t) dt
 \end{aligned}$$

Stel $t - \tau \triangleq \theta$. Dan is

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f_\tau(t) &= \exp(-s\tau) \int_0^{+\infty} \exp[-s\theta] f_\tau(\tau + \theta) d\theta \\ &= \exp(-s\tau) \int_0^{+\infty} \exp[-s\theta] f(\theta) d\theta \\ &= \exp(-s\tau) \mathcal{L}f(t)\end{aligned}$$

A.2.4 Transformatie van een periodieke functie

Definieer $g(t)$ en $g_1(t)$ als volgt (Figuur A.5): Zij $G(s) = \mathcal{L}g(t)$ dan geldt:



Figuur A.5: Transformatie van een periodieke functie.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}g_1(t) &= G(s) + \exp(-sT)G(s) + \exp(-2sT)G(s) + \dots \\ &= G(s)[1 + \exp(-sT) + \exp(-2sT) + \dots] \\ &= \frac{1}{1 - \exp(-sT)}G(s)\end{aligned}$$

A.2.5 Stelling van de begin- en eindwaarde

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s)$$

Indien $F(s)$ gedefinieerd is voor $\operatorname{Re}(s) = \sigma > \sigma_0$ dan geldt ook:

$$f(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

We kunnen dus s laten naderen tot nul zonder het convergentiegebied van $F(s)$ te verlaten.

Bewijs:

$$\mathcal{L} \frac{df(t)}{dt} = \int_0^{+\infty} df(t) \exp(-st) = sF(s) - f(0^+)$$

Laat $s \rightarrow +\infty$. Dan volgt onmiddellijk:

$$0 = \lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s) - f(0^+)$$

of

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s)$$

Laat $s \rightarrow 0$. Dan volgt er:

$$\int_0^{+\infty} df(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(0^+)$$

of

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) - f(0^+) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(0^+)$$

zodat

$$f(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

A.2.6 Verandering van tijdschaal

$$\mathcal{L} f\left(\frac{t}{a}\right) = aF(as)$$

Bewijs:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} f\left(\frac{t}{a}\right) &= \int_0^{+\infty} \exp(-st) f\left(\frac{t}{a}\right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} a \exp\left(-as \frac{t}{a}\right) f\left(\frac{t}{a}\right) d\frac{t}{a} \end{aligned}$$

Stel $\tau \triangleq \frac{t}{a}$. Dan is

$$\mathcal{L} f\left(\frac{t}{a}\right) = \int_0^{+\infty} a \exp(-as\tau) f(\tau) d\tau = aF(as)$$

A.2.7 Integratie in de tijd

$$\mathcal{L} \int_0^t f(\theta) d\theta = \frac{1}{s} \mathcal{L} f(t)$$

Bewijs: Stel $\int_0^t f(t) dt \triangleq g(t)$. Dan is

$$\frac{dg(t)}{dt} = f(t) \quad ; \quad g(0^+) = 0$$

zodat achtereenvolgens:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \frac{dg(t)}{dt} &= s \mathcal{L} g(t) \\ \mathcal{L} g(t) &= \frac{1}{s} \mathcal{L} \frac{dg(t)}{dt} \\ \mathcal{L} \int_0^t f(\theta) d\theta &= \frac{1}{s} \mathcal{L} f(t) \end{aligned}$$

A.2.8 Translatie in het complexe vlak

Zij a een complexe constante. Dan is

$$F(s + a) = \mathcal{L} \exp(-at) f(t)$$

Bewijs:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \exp(-at) f(t) &= \int_0^{+\infty} \exp[-(a + s)t] f(t) dt \\ &= F(s + a) \end{aligned}$$

A.2.9 Afleiding en integratie in het complexe domein

$$\begin{aligned} \mathcal{L} t f(t) &= -\frac{dF(s)}{ds} \\ \mathcal{L} \frac{f(t)}{t} &= \int_s^{+\infty} F(\theta) d\theta \end{aligned}$$

Bewijs

$$\begin{aligned}
 \frac{dF(s)}{ds} &= \frac{d}{ds} \int_0^{+\infty} \exp(-st) f(t) dt \\
 &= \int_0^{+\infty} (-t) \exp(-st) f(t) dt \\
 &= - \int_0^{+\infty} \exp(-st) t f(t) dt \\
 &= -\mathcal{L} t f(t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_s^{+\infty} f(\theta) d\theta &= \int_s^{+\infty} d\theta \int_0^{+\infty} \exp(-\theta t) f(t) dt \\
 &= \int_0^{+\infty} f(t) dt \int_s^{+\infty} \exp(-\theta t) d\theta \\
 &= \int_0^{+\infty} f(t) dt \left[\frac{\exp(-\theta t)}{-t} \right]_{\theta=s}^{\theta=+\infty} \\
 &= \int_0^{+\infty} f(t) dt \frac{\exp(-st)}{t} = \mathcal{L} \frac{f(t)}{t}
 \end{aligned}$$

A.2.10 Stelling van Duhamel

Beschouw het interval $[0, t]$ en de functies f en g , beide continu in $[0, t]$. Dan definiëren we de convolutie $(f \otimes g)$ als de functie

$$f \otimes g(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

door substitutie volgt ook dat:

$$f \otimes g(t) = \int_0^t g(\tau) f(t - \tau) d\tau$$

Indien

$$\mathcal{L} f_1(t) = F_1(s)$$

en

$$\mathcal{L} f_2(t) = F_2(s)$$

dan is de transformatie van de convolutie

$$\mathcal{L} \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau = F_1(s) F_2(s)$$

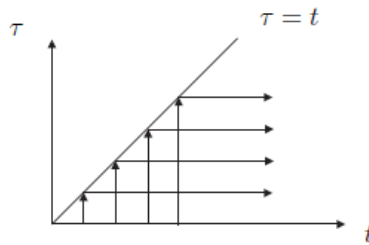
Bewijs: Laat

$$f(t) \triangleq \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau$$

Dan is

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f(t) &= \int_0^{+\infty} \exp(-st)dt \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau \\ &= \int_0^{+\infty} dt \int_0^t d\tau \exp(-st)f_1(t-\tau)f_2(\tau) \\ &= \int_0^{+\infty} d\tau \int_\tau^{+\infty} dt \exp(-st)f_1(t-\tau)f_2(\tau)\end{aligned}$$

Stel $t - \tau \triangleq u$. Dan is



Figuur A.6: Transformatie van de convolutie.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f(t) &= \int_0^{+\infty} d\tau \int_0^{+\infty} du \exp[-s(\tau+u)]f_1(u)f_2(\tau) \\ &= \int_0^{+\infty} d\tau \exp(-s\tau)f_2(\tau) \int_0^{+\infty} du \exp(-su)f_1(u) \\ &= F_1(s)F_2(s)\end{aligned}$$

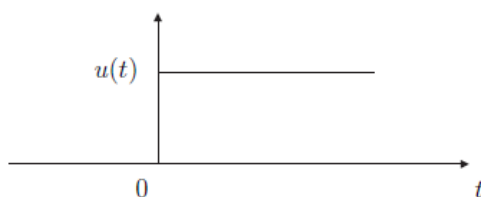
A.3 Laplace transformatie van belangrijke functies

A.3.1 Getransformeerde van een stapfunctie

Definieer

$$\begin{aligned}u(t) &= 0 & \text{voor} & \quad t < 0 \\ u(t) &= 1 & \text{voor} & \quad t > 0\end{aligned}$$

Dan is



Figuur A.7: Stapfunctie.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}u(t) &= \int_0^{+\infty} \exp(-st)u(t)dt \\
 &= \int_0^{+\infty} \exp(-st)dt \\
 &= \left[\frac{\exp(-st)}{-s} \right]_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{s}
 \end{aligned}$$

A.3.2 Getransformeerd van een Dirac-impuls

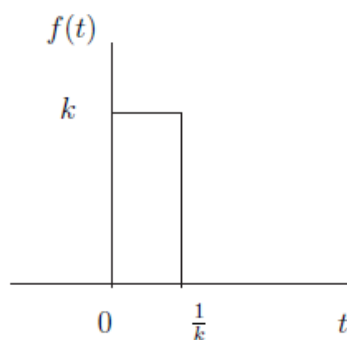
Stel

$$\begin{aligned}
 f(t) &= 0 & \text{voor} & \quad t < 0 \text{ en voor } t > \frac{1}{k} \\
 f(t) &= k & \text{voor} & \quad 0 < t < \frac{1}{k}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}f(t) &= \mathcal{L}k \left[u(t) - u\left(t - \frac{1}{k}\right) \right] \\
 &= k \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s} \exp\left(-\frac{s}{k}\right) \right] \\
 &= \frac{k}{s} \left[1 - \exp\left(-\frac{s}{k}\right) \right]
 \end{aligned}$$

De Dirac-impuls $\delta(t)$ wordt gedefinieerd als de limiet van de functie $f(t)$ als $k \rightarrow +\infty$. $\delta(t)$ voldoet aan:

- $\delta(t) = 0$ voor $t \neq 0$

**Figuur A.8:** Dirac-impuls.

- $\delta(0)$ is niet gedefinieerd
- $\int_0^{+\infty} \delta(t) dt = 1$

Voor $k \rightarrow +\infty$ is

$$\exp\left(-\frac{s}{k}\right) \approx 1 - \frac{s}{k}$$

zodat

$$\mathcal{L}\delta(t) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{L}f(t) = \frac{k}{s} \frac{s}{k} = 1$$

Door toepassing van de eigenschappen van de Laplace transformatie kunnen we nu een tabel opstellen met de getransformeerden van enkele veel voorkomende functies:

$F(s) = \mathcal{L}f(t)$	$f(t)$ voor $t > 0$
1	$\delta(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{s+a}$	$\exp(-at)$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$t \exp(-at)$
$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos(\omega t)$
$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin(\omega t)$
$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$\exp(-at) \cos(\omega t)$
$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$\exp(-at) \sin(\omega t)$

Tabel A.1: Laplace getransformeerden van enkele veel voorkomende functies.

Bijlage B

Oplossen van differentiaalvergelijkingen

B.1 Algemene theorie

We beschouwen het ingangs-uitgangsmodel van een algemeen n -de ordesysteem.

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y(t) = b_0 \frac{d^m u}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_m u(t) \quad (\text{B.1})$$

De ingang u en zijn afgeleiden zijn gekende functies van de tijd waarvoor we aannemen dat ze allen nul zijn op $t = 0$. Voor een unieke oplossing van de differentiaalvergelijking hebben we nog n beginvoorwaarden $\left[y(0) \quad \frac{dy}{dt}(0) \quad \frac{d^2 y}{dt^2}(0) \quad \dots \quad \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}(0) \right]$ nodig. De Laplace transformatie van (B.1) geeft ons:

$$s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} \frac{dy}{dt}(0) - \dots - \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}(0) + a_1 [s^{n-1} Y(s) - s^{n-2} y(0) - \dots - \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}}(0)] \\ + \dots + a_n Y(s) = b_0 s^m U(s) + b_1 s^{m-1} U(s) + \dots + b_m U(s)$$

We duidel de Laplace getransformeerden aan met behulp van hoofdletters. Bovenstaande vergelijking kunnen we wat herschikken.

$$[s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n] Y(s) = [s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + \dots + a_{n-1}] y(0) + \\ [s^{n-2} + a_1 s^{n-3} + \dots + a_{n-2}] \frac{dy}{dt}(0) + \dots + \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}(0) + \\ [s^m b_0 + s^{m-1} b_1 + \dots + b_m] U(s)$$

Dit kunnen we herschrijven als:

$$Y(s) = \frac{\overbrace{[s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + \dots + a_{n-1}]y(0) + \dots + \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}(0)}^{\text{beginvoorwaarden}}}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} + \underbrace{\frac{s^m b_0 + s^{m-1} b_1 + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} U(s)}_{\text{ingang}}$$

We hebben de differentiaalvergelijking getransformeerd tot een algebraïsche vergelijking in het Laplace domein. De uitdrukking in het rechterlid van bovenstaande vergelijking valt uiteen in twee stukken. Een gedeelte hangt af van de beginvoorwaarden en een gedeelte hangt af van de ingang. Vaak spreekt men van de vrije responsie en de gedwongen responsie van het systeem. We voeren twee notaties in:

$$G_0(s) \triangleq \frac{[s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + \dots + a_{n-1}]y(0) + \dots + \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}(0)}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} \quad (\text{B.2})$$

$$G(s) \triangleq \frac{s^m b_0 + s^{m-1} b_1 + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} \quad (\text{B.3})$$

zodat

$$Y(s) = G_0(s) + G(s)$$

$G_0(s)$ en $G(s)$ zijn rationale functies van de complexe veranderlijke s . Beide hebben dezelfde noemer

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n \quad (\text{B.4})$$

(B.4) wordt de karakteristieke veelterm genoemd. Als we (B.4) gelijk aan nul stellen bekommen we de karakteristieke vergelijking. De wortels van de karakteristieke vergelijking zijn ofwel reële of wel paren van complex toegevoegde getallen. De graad van de karakteristieke veelterm komt overeen met de orde van de differentiaalvergelijking. We wensen de tijdsevolutie van $y(t)$ te kennen. Daartoe moeten we $Y(s)$ terug transformeren naar de tijd via de inverse Laplace transformatie. Er bestaan verschillende technieken om van het Laplace domein terug te keren naar het tijdsdomein. We gaan ons beperken tot het splitsen in partieelbreuken. Algemeen geldt dat elke rationale functie $\frac{T(s)}{N(s)}$ kan opgesplitst worden als de som van rationale functies van de vorm

$$\frac{A}{(as + b)^r} \quad (\text{B.5})$$

en

$$\frac{As + B}{(as^2 + bs + c)^r} \quad (\text{B.6})$$

met $r = 1, 2, 3, \dots$ afhankelijk van de multipliciteit van de wortels van de karakteristieke vergelijking $N(s) = 0$. (B.5) stemt overeen met een reële wortel $\lambda = -\frac{b}{a}$ met multipliciteit r . (B.6) stemt overeen met twee complex toegevoegde wortels $\lambda_i = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}j\sqrt{4ac - b^2}$. $i = 1, 2$ met $b^2 - 4ac < 0$. Tabel B.1 geeft de correspondentie aan tussen de wortels van de karakteristieke vergelijking en de termen in de partieelbreuken. Na opsplitsing worden de

factor in $N(s)$	termen in de partieelbreuk
$as + b$	$\frac{A_1}{as + b}$
$as^2 + bs + c$	$\frac{A_1s + B_1}{as^2 + bs + c}$
$(as + b)^r$	$\frac{A_1}{as + b} + \frac{A_2}{(as + b)^2} + \dots + \frac{A_r}{(as + b)^r}$
$(as^2 + bs + c)^r$	$\frac{A_1s + B_1}{as^2 + bs + c} + \frac{A_2s + B_2}{(as^2 + bs + c)^2} + \dots + \frac{A_rs + B_r}{(as^2 + bs + c)^r}$

Tabel B.1: Splitsen in partieelbreuken.

partieelbreuken op gelijke noemer gebracht en de onbekende coëfficiënten A_i , B_i gevonden door de tellerveelterm gelijk te stellen aan $T(s)$. De som van de rationale functies kan m.b.v. Tabel A.1 getransformeerd worden naar het tijdsdomein. We illustreren dit met volgend voorbeeld:

$$G(s) = \frac{s + 1}{(s + 2)(s^2 + 4s + 5)}$$

De wortels van de karakteristieke vergelijking zijn:

$$\lambda_1 = -2$$

$$\lambda_{2,3} = -2 \pm j$$

We splitsen $G(s)$ in partieelbreuken:

$$\begin{aligned} G(s) = \frac{s + 1}{(s + 2)(s^2 + 4s + 5)} &= \frac{A}{s + 2} + \frac{Bs + C}{s^2 + 4s + 5} \\ &= \frac{A(s^2 + 4s + 5) + (Bs + C)(s + 2)}{(s + 2)(s^2 + 4s + 5)} \end{aligned}$$

De coëfficiënten volgen uit het stelsel:

$$\begin{cases} s^2 & A + B = 0 \\ s^1 & 4A + 2B + C = 1 \\ s^0 & 5A + 2C = 1 \end{cases}$$

We vinden als oplossing

$$A = -1$$

$$B = 1$$

$$C = 3$$

$G(s)$ wordt nu

$$G(s) = \frac{-1}{s+2} + \frac{s+3}{s^2+4s+5}$$

of

$$G(s) = \frac{-1}{s+2} + \frac{s+2}{(s+2)^2+1} + \frac{1}{(s+2)^2+1}$$

We vinden de corresponderende tijdsfunctie $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$ m.b.v. Tabel A.1:

$$g(t) = \exp(-2t)(-1 + \cos(t) + \sin(t))$$

B.2 Toepassing

B.2.1 Eerste-ordesysteem

$$\frac{K}{s\tau+1} \frac{1}{s} = -\frac{K}{s+\frac{1}{\tau}} + \frac{K}{s}$$

B.2.2 Tweede-ordesysteem

- $\zeta > 1$

$$\begin{aligned} \frac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_ns+\omega_n^2} \frac{1}{s} &= \frac{K\omega_n^2}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)s} \\ &= \frac{K\omega_n^2}{\lambda_1\lambda_2} \left\{ \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2} \frac{1}{s-\lambda_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} \frac{1}{s-\lambda_2} + \frac{1}{s} \right\} \end{aligned}$$

- $\zeta = 1$

$$\begin{aligned} \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s} &= \frac{K\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2 s} \\ &= -\frac{K}{s + \omega_n} - \frac{\omega_n K}{(s + \omega_n)^2} + \frac{K}{s} \end{aligned}$$

- $0 < \zeta < 1$

$$\begin{aligned} \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s} &= \frac{K}{s} - \frac{K(s + 2\zeta\omega_n)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= K \left(\frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \underbrace{\omega_n^2(1 - \zeta^2)}_{\omega_p^2}} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_p^2} \right) \end{aligned}$$