

06/10/16

Oefeningen Wiskunde

p. A1

2) Inductie : $m=1$: $1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$

$$1 = 1 \quad \checkmark$$

stel geldig voor $m \leq N$ $(2N+1) + 1$
 TB: $1^2 + 2^2 + \dots + N^2 + (N+1)^2 = \frac{(N+1)(N+2)(2N+3)}{6}$

$$= \frac{1}{6} N(N+1)(2N+1) + (N+1)^2$$

$$= \frac{1}{6} (N+1) [N(2N+1) + 6(N+1)]$$

$$= \frac{1}{6} (N+1) (2N^2 + 7N + 6)$$

$$D = \sqrt{49 - 48} = 1$$

$$\frac{-7-1}{4} = -2$$

$$\frac{-7+1}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$= \frac{1}{6} (N+1) 2(N+2) \left(N + \frac{3}{2}\right)$$

 $N \neq 0$ zonder 0

3) $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ (geen gemeensch. termen)

$$V_1 \cap V_4 = V_4$$

$$V_m \in \mathbb{N}^*$$

$$0 < \frac{1}{m} < 1$$

$$V_4 \subset [0, 1] \subset V_1$$

$$V_1 \cap V_5 = V_5$$

Supr: kleinste bovengrens

$$\sup V_1 = 3$$

$$\sup V_2 = \text{bestaat niet}$$

$$\sup V_4 = 1$$

infimum : grootste ondergrens
 $\inf V_k = 0$

↳ stel $\inf V_k$ is niet 0

↔ $\exists \varepsilon > 0$ ε ondergrens

↔ $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \varepsilon \leq \frac{1}{m}$

↔ $m \leq \frac{1}{\varepsilon}$ Kan niet!

dus $\inf V_k = 0$

5) $V = \{ \underbrace{a}, \underbrace{\{b, c\}}, \underbrace{d} \}$
 3 elementen

i : fout

ii : juist

iii : fout

$\{b, c\}$ element van V

$\subset$ = deelverzameling

$\in$ = element

Wel juist : $\{ \{b, c\} \} \subset V$

$\{ \{b, c\}, d \} \subset V$

6) $V = \{a, b, c\}$

$W = \{a, 1, 2\}$



$$V \setminus W = \{b, c\}$$

$$W \setminus V = \{1, 2\}$$

$$V \cap W = \{a\}$$

$$i: V \setminus W \cap W \setminus V = \emptyset$$

$$ii: \emptyset$$

$$iii: W \cup (= +)$$

iv: verzameling bestaande uit koppels met 1 element uit V en 2 uit W , hoeveel koppels uit V en W ? $\rightarrow 9$

$$7) \quad b. \quad \frac{1}{2} \in V_3 \quad \left(\frac{1}{2} \text{ zit in } V_3 \right)$$

$$\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \frac{2m^2 - 7m - 4}{m^2 + 5m + 6} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N} : 2(2m^2 - 7m - 4) = m^2 + 5m + 6$$

en $m^2 + 5m + 6 \neq 0$

$$\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N} \quad (\text{altijd OK, voor } m \in \mathbb{N})$$

$$\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N} : 3m^2 - 19m - 14 = 0$$

$D = \sqrt{23}$

$$\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N} : m = 7 \quad m = -\frac{2}{3}$$

Waar

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \in V_3$$

$$d) V_1 \subset V_3 \iff \forall v \in V_1: v \in V_3$$

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \exists R \in \mathbb{N} \quad \frac{2m+3}{m+1} = \frac{2R^2 - 7R - 4}{R^2 + 5R + 6}$$

$$\text{Stel } m=0 : 3 = \frac{2R^2 - 7R - 4}{R^2 + 5R + 6} \quad \text{voor een zeker } R \in \mathbb{N}$$

$$\iff 0 = R^2 + 22R + 22$$

$$D = 396$$

$$\sqrt{D} \notin \mathbb{N}$$

$$3 \notin V_3$$

$$\hookrightarrow V_1 \not\subset V_3$$

$$1. V_1 \cap \mathbb{N}$$

$$V_1 = \left\{ \frac{2m+3}{m+1} \mid m \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{2(m+1) - 2 + 3}{m+1} \mid m \in \mathbb{N} \right\}$$

$$= \left\{ 2 + \frac{1}{m+1} \mid m \in \mathbb{N} \right\}$$

$$? \quad 2 + \frac{1}{m+1} \in \mathbb{N} \iff m+1 \mid 1$$

$\hookrightarrow$ delen van

$$\iff m+1 = 1$$

$$\iff m = 0$$

$$\hookrightarrow V_1 \cap \mathbb{N} = \{3\}$$

$$3. \quad V_2 \cap V_4 = \left\{ \frac{R+2}{2R+3} = \frac{m^2-1}{m^2+1} \mid R \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \right\}$$

$$R(m^2+1) + 2(m^2+1) = 2R(m^2-1) + 3(m^2-1)$$

$$\Leftrightarrow R(-m^2+3) = m^2-5$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{m^2-5}{3-m^2}$$

$$R = \frac{m^2-5}{3-m^2} = \frac{-3+m^2+3-5}{3-m^2}$$

$$R = -1 + \frac{2}{3-m^2}$$

$$\in ? \mathbb{N}$$

$$\text{als } m \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow 3-m^2 \mid 2 \Leftrightarrow m=2$$

$$R = -1 + \frac{2}{m^2-3}$$

$$m^2-3 \mid 2 \Leftrightarrow m=2 \left. \vphantom{m^2-3 \mid 2} \right\} V_2 \cap V_4 = \left\{ \frac{3}{5} \right\}$$

$$3-m^2 = -2$$

$$m^2 = 5$$

$$m = \sqrt{5} \vee m = -\sqrt{5} ?$$

Oefeningen bij de cursus Wiskunde I

1 Inleidende begrippen

1. Gebruik inductie om aan te tonen dat de som van de eerste n oneven getallen gelijk is aan n^2 . M.a.w., toon aan :

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

2. Gebruik inductie om de som van de eerste n kwadraten te bepalen :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Beschouw de volgende deelverzamelingen van $\mathbb{R}$:

$$V_1 = [-2, 3[$$

$$V_2 = [3, +\infty[$$

$$V_3 =]-\infty, 0]$$

$$V_4 = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\} = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$$

$$V_5 = \{\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots\} = \{\frac{n+1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Bepaal de verzamelingen $V_1 \cap V_i$ ($i = 2, 3, 4, 5$). Bepaal vervolgens $\sup V_i$ en $\inf V_i$ voor elke V_i , zo dit bestaat tenminste.

4. Beschouw $V = \{a, b, c\}$. Geef alle deelverzamelingen van V .
5. Zij $V = \{a, \{b, c\}, d\}$. Welke beweringen zijn juist/vals?

(i) $\{b, c\} \subset V$ *deelverzameling*

(ii) $\{b, c\} \in V$

(iii) $b \in V$

6. Gegeven zijn

$$V = \{a, b, c\},$$

$$W = \{a, 1, 2\}.$$

Bepaal :

(i) $(V \setminus W) \cap (W \setminus V)$

(ii) $(V \setminus W) \cap (W \cap V)$

(iii) $(W \setminus V) \cup (V \cap W)$

(iv) $V \times W$

7. Beschouw de volgende verzamelingen :

$$V_1 = \left\{ \frac{2n+3}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$V_2 = \left\{ \frac{n+2}{2n+3} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$V_3 = \left\{ \frac{2n^2 - 7n - 4}{n^2 + 5n + 6} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$V_4 = \left\{ \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

(i) Welke van de volgende uitspraken zijn waar/vals?

(a) $0 \in V_3$

(b) $\frac{1}{2} \in V_3$

(c) $1 \in V_3$

(d) $V_1 \subset V_3$

(e) $\frac{4}{5} \in V_4$

(f) $3 \in V_4$

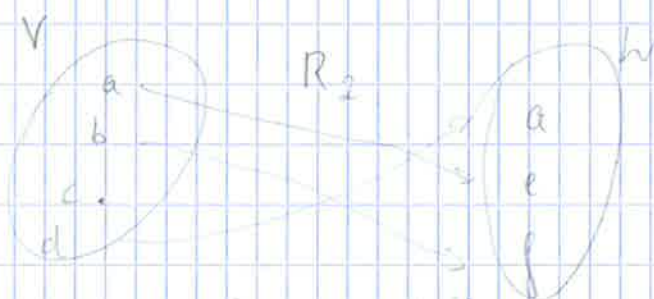
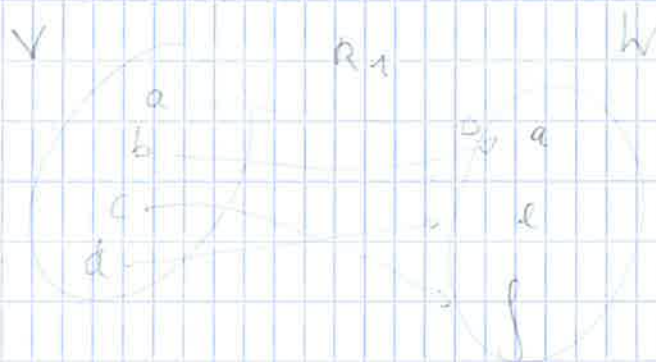
(ii) Bepaal de volgende verzamelingen :

(1) $V_1 \cap \mathbb{N}$ (2) $V_4 \cap \mathbb{Z}$ (3) $V_2 \cap V_4$

13/10/16

p. A.3

1)



	functie	afbeelding	surjectie	injectie
R_1	✓	✓	✓	Nee (a, a) (b, a)
R_2	✓	Nee $(c, ?)$	✓	✓
R_1^{-1}	Nee $(a, a) \in R_1^{-1}$ $(a, b) \in R_1^{-1}$	/// Dat is geen fun ///		///
R_2^{-1}	✓	✓	Nee $(?, c)$	✓

$$2) \quad b. \quad y = -\sqrt{2-x^2} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, y = -\sqrt{2-x^2}\}$$

$$\begin{aligned} \text{def}(f) &= \text{vw: wortel!} \\ 2-x^2 &\geq 0 \\ 2 &\geq x^2 \\ \sqrt{2} &\geq x \geq -\sqrt{2} \end{aligned}$$

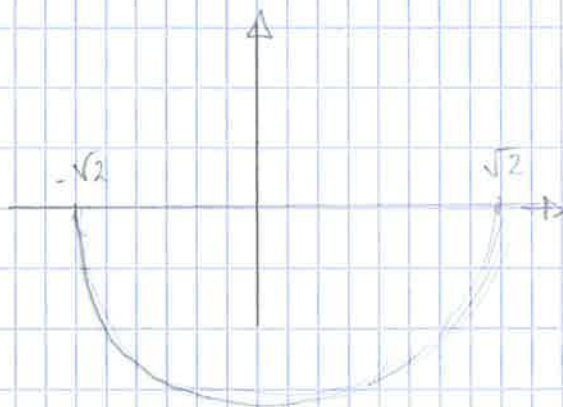
$$\text{def}(f) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

$$\text{im}(f) = \text{via inverse relatie berekenen}$$

$$\begin{aligned} &y = -\sqrt{2-x^2} \\ \rightarrow &y^2 = 2-x^2 \quad (\text{kwadrateren}) \quad \text{vw: } y \leq 0 \\ \Leftrightarrow &x^2 = 2-y^2 \\ \Leftrightarrow &x = \sqrt{2-y^2} \quad \wedge y \leq 0 \quad \vee \quad x = -\sqrt{2-y^2} \quad \wedge y \leq 0 \\ &\rightarrow \text{voor 1 } y \text{ krijg je 2 } x\text{'en} \\ &\rightarrow \text{geen functie, wel een verzameling} \end{aligned}$$

$$\text{im}(f) = \text{def}(f^{-1}) + \text{vw} = [-\sqrt{2}, 0]$$

$$\text{def}(f^{-1}) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \rightarrow \text{vw } y \leq 0$$



$$3) \quad f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad g(x) = \frac{x}{2x+3}$$

a. even / uneven?

$$f(-x) = \sqrt{1-(-x)^2} = \sqrt{1-x^2}$$

↳ zelfde functie dus even functie

$$b. \quad f \circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2x+3}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(2x+3)^2 - x^2}{(2x+3)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{3x^2 + 12x + 9}{(2x+3)^2}}$$

c. def($f \circ g$)

$$= \sqrt{\frac{3(x+1)(x+3)}{(2x+3)^2}}$$

$$\Delta = \sqrt{144 - 144} = 0$$

$$= 6$$

$$\frac{-12 \pm 6}{6}$$

$$\frac{-12 \pm 6}{6}$$

$$-3$$

$$-1$$

$$\text{def}(f \circ g) = (\mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}) \cap \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{\quad} \geq 0\}$$

$$= (\mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}) \cap (]-\infty, -3] \cup [-1, +\infty[)$$

$$=]-\infty, -3] \cup [-1, +\infty[\quad (\setminus \{-\frac{3}{2}\})$$

2^e maniere: $x \in \text{def } g = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

$g(x) \in \text{def } f = [-1, 1]$

? wann immer $-1 \leq \frac{x}{2x+3} \leq 1$

Wann immer ist die erfüllt?

aufsplitten

A $\cdot -1 \leq \frac{x}{2x+3} \rightarrow 0 \leq 1 + \frac{x}{2x+3}$

$0 \leq \frac{3x+3}{2x+3}$

B $\cdot \frac{x}{2x+3} \leq 1$

selbste manieren

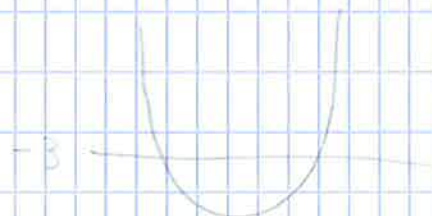
$A \cap B$

$\frac{x}{2x+3} - 1 \leq 0$

$-\frac{x-3}{2x+3} \leq 0$

5) $f(x) = (2x+1)t + x^2 + 6x$

a. ? $f(x) = -3$



$-3 = (2x+1)t + x^2 + 6x$

$0 = x^2 + (2t+6) \cdot x + \underbrace{t+3}$

$D = \frac{(2t+6)^2 - 4(t+3)}{4(t+3)(t+2)}$

Wörterbuch

t	-3	-2
D(t)	+	-

dus a) 1 opl. $f(x) = -3$
 $\Leftrightarrow D(t) = 0$
 $\Leftrightarrow t = -3 \vee t = -2$

invullen
 in $x^2 + (2t+1)x + t+3$ $\left\{ \begin{array}{l} \cdot t = -3 : x^2 + 0x + 0 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \cdot t = -2 : x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \\ (x+1)^2 \end{array} \right.$

b) geen opl. $\Leftrightarrow$ (als hij geen nulpunten heeft)
 $D < 0$

$t \in]-3, -2[$ t-scheme voor p

c) 2 opl. $\Leftrightarrow$ als $D > 0$

$t \in]-\infty, -3[\vee]-2, +\infty[$

dus :

$x = -\frac{-(t+3)}{2} - \frac{\sqrt{(t+3)(t+2)}}{2}$

$\frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$

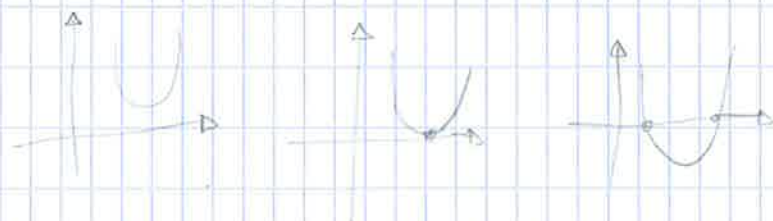
$x = -\frac{-(t+3)}{2} + \frac{\sqrt{(t+3)(t+2)}}{2}$
 $-\frac{b}{2a} +$

$\frac{-(t+3) - \sqrt{4(t+3)(t+2)}}{2}$

$\frac{-(t+3) - 2\sqrt{(t+3)(t+2)}}{2}$

8) $f(x) = x^2 + 2(m+1) \cdot x - 2(m+1)$

$a > 0$ dus 3 opties



$$\begin{aligned} D(m) &= 4(m+1)^2 + 4 \cdot 2(m+1) \\ &= 4(m+1)(m+3) \end{aligned}$$

m	-3	-1
D	+ 0 - 0 +	

↳ 1^e geval : $D=0$ ^{Wanneer} $\Leftrightarrow m=-1 \vee m=-3$

1.1 $m=-1$: $p(x) = x^2$
_{imivalenten}

x	0
f(x)	+ 0 +

1.2 $m=-3$: $p(x) = x^2 - 4x + 4$
 $= (x-2)^2$

x	2
f(x)	+ 0 +

↳ 2^e geval : $D > 0 \Leftrightarrow m \in]-\infty, -3[\cup]-1, +\infty[$

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= -(m+1) - \sqrt{(m+1)(m+3)} \\ x_2 &= -(m+1) + \sqrt{(m+1)(m+3)} \end{aligned} \right.$$

x	x_1	x_2
f(x)	+ 0 - 0 +	

↳ 3^e geval : $\Delta < 0 \Leftrightarrow m \in]-3, -1[$

$$\begin{array}{c|c} x & \\ \hline f(x) & + \end{array} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0$$

10) d. $f_4(x) = \log_5 (x^2 + 2(m+1)x - 2m-2)$

$f(x)$ v. def 8!
(rekenwiel al gedaan)

I. $\text{def}(f_4) = \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{als } f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

($\text{def}(\log_5) =]0, +\infty[$)

$\Leftrightarrow m \in]-3, -1[$

II. $\text{def}(f_4) = \emptyset \Leftrightarrow \text{nooit} = \forall x \in \mathbb{R} : f(x) \leq 0$

in ons keuzeschema's
staat wel +!

v. def 8

III. $\text{def}(f_4) = \begin{cases} 1. & \begin{cases} 1.1 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1.2 : \mathbb{R} \setminus \{2\} \end{cases} \\ 2 &]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[\\ 3 & \mathbb{R} \end{cases}$

2 Functies

1. Gegeven zijn de volgende verzamelingen :

$$V = \{a, b, c, d\}, \quad W = \{a, e, f\}.$$

Stel dat $R_1, R_2 \subset V \times W$, met

$$R_1 = \{(a, a), (b, a), (c, f), (d, e)\}, R_2 = \{(a, e), (d, a), (b, f)\}.$$

Ga na welke van de relaties R_1, R_2, R_1^{-1} en R_2^{-1} functies, afbeeldingen, surjectief of injectief zijn.

2. Bepaal de definitieverzameling en de waardeverzameling van volgende functies:

(a) $y = \frac{x^2+16}{x+4}$

(b) $y = -\sqrt{2-x^2}$

3. Gegeven zijn de volgende reële functies

$$f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}, \quad g : x \mapsto \frac{x}{2x+3}.$$

(a) Onderzoek of f een elementaire symmetrie bezit.

(b) Bepaal de samenstelling $f \circ g$.

(c) Geef de definitieverzameling van $f \circ g$.

4. Gegeven:

$$f(x) = x^2 + 2(s+2)x - 3(s-1).$$

Voor welke waarde(n) van s

(a) bestaat er juist één x waarvoor $f(x) = 11$? Geef deze x .

(b) bestaat er geen enkele x waarvoor $f(x) = 11$?

(c) bestaan er twee verschillende x_1 en x_2 waarvoor $f(x_1) = f(x_2) = 11$?
Bepaal x_1 en x_2 .

5. Gegeven:

$$f(x) = (2x+1)t + x^2 + 6x.$$

Voor welke waarde(n) van t

(a) bestaat er juist één x waarvoor $f(x) = -3$? Geef deze x .

(b) bestaat er geen enkele x waarvoor $f(x) = -3$?

(c) bestaan er twee verschillende x_1 en x_2 waarvoor $f(x_1) = f(x_2) = -3$?
Bepaal x_1 en x_2 .

6. Gegeven:

$$f(x) = x^2 + 2(s+2)x + 15.$$

Voor welke waarde(n) van s

20/10/16

p. A.4,

10)

$$e. f_5(x) = \sqrt{-x^2 - 2mx - 3m + 2} = \sqrt{R(x)}$$

$$(1) \text{ def } f_5 = \mathbb{R} \Leftrightarrow R(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$D(m) \leq 0 \quad \wedge \quad (\text{coeff. } x^2 > 0)$$

discriminant v. m

Er bestaat geen m zodat
 $\text{def } f_5 = \mathbb{R}$

$$(2) \text{ def } f_5 = \emptyset \Leftrightarrow R(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow D(m) < 0 \quad \wedge \quad (\text{coeff. } x^2 < 0)$$

$$\downarrow$$

$$(-2m)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3m + 2) \stackrel{\text{OK}}{< 0}$$

$$(m-1)(m-2) < 0$$

m	1	2	
D(m)	+ 0	- 0 +	$\Leftrightarrow m \in]1, 2[$

$$(3) \quad ? \quad m \in]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$$

zelf thuis (zie oef. 10. d)

9)

$$b. f_2(x) = \sqrt{x+1}$$

$$\text{def } f_2 = \dots$$

$$\text{VWB: } x+1 \geq 0$$

$$x \geq -1$$

$$[-1, +\infty[$$

Inverse relatie: $y = \sqrt{x+1}$

$$\Leftrightarrow y^2 = x+1 \quad \wedge \quad y \geq 0$$

$$x = y^2 - 1 \quad \wedge \quad y \geq 0$$

$\hookrightarrow$ dit is een functie

$$f_2^{-1}(y) = y^2 - 1$$

$$\text{Im}(f_2) = \text{def}(f_2)^{-1} \cap \forall v: \mathbb{R} [0, +\infty[= [0, +\infty[$$

$\rightarrow f_2$ is bijectief = (1-1 verband)

d. $f_4(x) = \log_3(x^4 - 3)$
 $(\text{def}(\log_3) =]0, +\infty[)$

$\text{def } f_4 = \dots$
 $\forall v: x^4 - 3 > 0$

$$x^4 > 3 \iff \sqrt{(x^2)^2} > \sqrt{3}$$

$$\sqrt{x^2} > \sqrt{\sqrt{3}}$$

$$|x| > \sqrt[4]{3}$$

$$\text{def } f_4 =]-\infty, -\sqrt[4]{3}[\cup]\sqrt[4]{3}, +\infty[$$

$$x^4 - 3 = (x^2 - \sqrt{3})(x^2 + \sqrt{3})$$

$$= (x - \sqrt[4]{3})(x + \sqrt[4]{3})(x^2 + \sqrt{3})$$

Inverse relatie

$$y = \log_3(x^4 - 3)$$

$$3^y = x^4 - 3 \quad \wedge y \in \text{Im}(\log_3) = \mathbb{R}$$

$$x^4 = 3^y + 3$$

$$x = +\sqrt[4]{3^y + 3} \quad \vee \quad x = -\sqrt[4]{3^y + 3}$$

$\wedge (3^y + 3) \in [0, +\infty[$
 OK
 we krijgen 2 x'en
 $\rightarrow$ geen functie

$$\text{Im}(f_4) = \mathbb{R}$$

f_4 bijectie maken

$$f_4^+ = f_4|_{] \sqrt[4]{3}, +\infty[}$$

$$(f_4^+)^{-1}(y) = +\sqrt[4]{3^y + 3}$$

$$\text{Im}(f_4^+) = \mathbb{R}$$

$\hookrightarrow$ wel een functie

- (a) bestaat er juist één x waarvoor $f(x) = 6$? Geef deze x .
- (b) bestaat er geen enkele x waarvoor $f(x) = 6$?
- (c) bestaan er twee verschillende x_1 en x_2 waarvoor $f(x_1) = f(x_2) = 6$?
Bepaal x_1 en x_2 .

7. Gegeven:

$$f(x) = -x^2 + (x+1)m + (m-x)x.$$

Voor welke waarde(n) van m

- (a) bestaat er juist één x waarvoor $f(x) = -\frac{1}{2}$? Geef deze x .
- (b) bestaat er geen enkele x waarvoor $f(x) = -\frac{1}{2}$?
- (c) bestaan er twee verschillende x_1 en x_2 waarvoor $f(x_1) = f(x_2) = -\frac{1}{2}$?
Bepaal x_1 en x_2 .

8. Gegeven:

$$f(x) = m(2x-2) + (x^2 + 2x - 2).$$

Bespreek het tekenverloop van deze functie naargelang de waarde van m , $m \in \mathbb{R}$.

9. Gegeven:

- (a) $f_1(x) = \log_2(x^2 + 1)$
- (b) $f_2(x) = \sqrt{x+1}$
- (c) $f_3(x) = x^2$
- (d) $f_4(x) = \log_3(x^4 - 3)$

Bepaal de maximale definitie- en waardeverzameling van deze functies zodat ze bijjectief zijn. Bepaal tevens de inverse functie.

10. Gegeven :

- (a) $f_1(x) = \log_2(x^2 + 2(m+1)x + m + 7)$
- (b) $f_2(x) = \sqrt{mx^2 + 2mx + (m+1)}$
- (c) $f_3(x) = \log((m+1)(1-2x) - 3x^2)$
- (d) $f_4(x) = \log_5(x^2 + 2(m+1)x - 2m - 2)$
- (e) $f_5(x) = \sqrt{-x^2 - 2m(x+1) - m + 2}$

Voor welke waarden van de parameter m is de definitieverzameling van de functie f_i

- (i) gelijk aan $\mathbb{R}$?
- (ii) gelijk aan $\emptyset$?
- (iii) Geef voor de overige waarden van m de definitieverzameling van f_i in functie van de parameter m .

11) d.

$$f_4(x) = \arctan(x^2 - 8x + 1)$$

$$\text{def}(f_4) = \dots$$

$$\text{VW: } \rightarrow x \in \text{def}(x^2 - 8x + 1) = \mathbb{R}$$

$$2) x^2 - 8x + 1 \in \text{def}(\arctan) = \mathbb{R}$$

$$\text{dus } \text{def}(f_4) = \mathbb{R}$$

$$y = \arctan(x^2 - 8x + 1)$$

$$\tan(y) = x^2 - 8x + 1 \quad \wedge \quad y \in \text{Im}(\arctan)$$

$$\text{VW 1: }] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$$

$$\rightarrow x^2 - 8x + 1 - \tan(y) = 0$$

$$D = 64 - 4 \cdot (1 - \tan(y)) \geq 0 \quad \text{VW. 2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{8 - \sqrt{64 - 4 \cdot (1 - \tan(y))}}{2}$$

$$\vee x = \frac{8 + \sqrt{64 - 4 \cdot (1 - \tan(y))}}{2}$$

$$\text{def}(f_4^{-1}) = \dots$$

$$\Leftrightarrow 64 - 4 + 4 \cdot \tan(y) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 15 + \tan(y) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y \geq \arctan(-15)$$

gegeben VW. 1

$$\text{def}(f_4^{-1}) \cap \text{VW 1} = [\arctan(-15), \frac{\pi}{2} [$$

11) e.

$$f_5(x) = \arccos(-2x^2 - 3x)$$

$$\text{def } f_5 = \dots$$

$$\text{VW: } -2x^2 - 3x \in \text{def}(\arccos)$$

$$\rightarrow -1 \leq -2x^2 - 3x \leq 1$$

$$\rightarrow -1 \leq -2x^2 - 3x \quad (a)$$

$$\wedge -2x^2 - 3x \leq 1 \quad (b)$$

$$(a). \quad 0 \leq -2x^2 - 3x + 1$$

$$0 \leq -2 \left(x - \frac{-3 - \sqrt{17}}{4} \right) \left(x - \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \right)$$

$$x \in \left[\frac{-3 - \sqrt{17}}{4}, \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \right]$$

$$\sqrt{9 + 4 \cdot 2 \cdot 1} = \sqrt{17}$$

$$\frac{3 - \sqrt{17}}{4} \quad \frac{3 + \sqrt{17}}{4}$$

$$\begin{array}{c|cc} x & \frac{-3 - \sqrt{17}}{4} & \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \\ \hline f(x) & - & + & 0 & - \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} x & -1 & -\frac{1}{2} \\ \hline f(x) & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

$$(b). \quad -2x^2 - 3x \leq 1$$

$$2x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

$$2 \left(x + \frac{1}{2} \right) (x + 1) \geq 0$$

$$x \in]-\infty, -1] \cup \left[-\frac{1}{2}, +\infty \right[$$

$$\text{def } f_S = \left[\frac{-3 - \sqrt{17}}{4}, -1 \right] \cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \right]$$

$$y = \arccos(-2x^2 - 3x)$$

$$\Leftrightarrow \cos(y) = -2x^2 - 3x \quad \wedge \quad \forall x. 1 \geq$$

$$y \in \text{Im}(\arccos)$$

$$[0, \pi]$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 3x + \cos(y) = 0$$

$$\Delta = 9 - 8 \cos(y)$$

$$x = \frac{-3 - \sqrt{9 - 8 \cos(y)}}{4}$$

$$\wedge \quad x = \frac{-3 + \sqrt{9 - 8 \cos(y)}}{4}$$

$$\text{Im}(f_S) = \dots$$

$$\forall x. 1 \wedge \text{def}(f_S^{-1}) =$$

$$\hookrightarrow 9 - 8 \cos(y) \geq 0$$

$$(\text{varia: } -1 \leq \cos(y) \leq 1)$$

$$\hookrightarrow y \in [0, \pi]$$

$$\text{dus } \text{def}(f_S^{-1}) = \mathbb{R}$$

27/10/16

11) g.

$$f(x) = \sin(\arccos(x^2))$$

$$x \mapsto x^2 \mapsto \arccos(x^2) \mapsto \sin(\arccos(x^2))$$

VW 1

$$x \in \underbrace{\text{def}(x^2)}_{\mathbb{R}}$$

VW 2

$$x^2 \in \text{def}(\arccos) \\ [-1, 1]$$

VW 3

$$\arccos(x^2) \in \underbrace{\text{def}(\sin)}_{\mathbb{R}}$$

$$\text{def } f = \dots$$

$$\text{VW 2: } \underbrace{-1 \leq x^2 \leq 1}_{\text{altjdok}}$$

$$\Leftrightarrow x^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{dus } \text{def } f = [-1, 1]$$

$$y = \sin(\arccos(x^2))$$

übertragen
übertragen

$$\Leftrightarrow \arcsin(y) = \arccos(x^2)$$

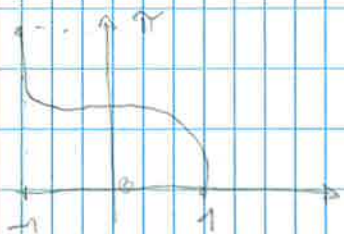
$$\Leftrightarrow \cos(\arcsin(y)) = x^2$$

$$\text{VW 1: } y \in \text{Im}(\sin)$$

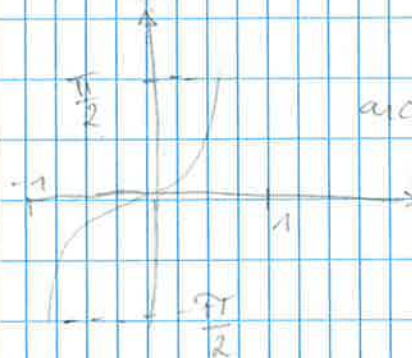
$$= [-1, 1]$$

$$\text{VW 2: } \arcsin(y) \in \text{Im}(\arccos)$$

$$= [0, \pi]$$



arccos



arcsin

$$\text{VW 3: } \cos(\arcsin(y)) \geq 0 \quad (y \in \text{Im}(x^2))$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\cos(\arcsin(y))}$$

$$\forall w 2: 0 \leq \arcsin(y) \leq \pi$$

$$\Leftrightarrow y \in [0, 1]$$

$$\forall w 3: \text{OK}$$

$$\rightarrow \text{Im}(f) = [0, 1]$$

$$14) \text{ c. } 4 \tan^3 x - 16 \tan^2 x - \tan x + 4 = 0$$

$$\text{Stel } t = \tan x: 4t^3 - 16t^2 - t + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4t^2(t-4) - (t-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-4)(4t^2-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-4)(2t-1)(2t+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow t=4 \vee t=\frac{1}{2} \vee t=-\frac{1}{2}$$

$$\tan x = 4 \vee \tan x = \frac{1}{2} \vee \tan x = -\frac{1}{2}$$

$$\tan x = 4: x = \arctan(4) + k\pi$$

$$\tan x = \frac{1}{2}: x = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + k\pi$$

$$\tan x = -\frac{1}{2}: x = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + k\pi$$

$$(k \in \mathbb{Z})$$

$$14) \text{ e. } \cos^2 x + 3 \cos x - 18 = 0$$

$$\text{Stel } p = \cos x$$

$$p^2 + 3p - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow \dots$$

$$\Leftrightarrow p = 3 \vee p = -6$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 3 \vee \cos x = -6$$

Geen opl.!

$$\sqrt{9+72} = 9$$

$$\frac{-3+9}{2} = \frac{-3+9}{2}$$

$$-6 \quad 3$$

11. Bepaal de definitie- en waardeverzameling van volgende functies. Zijn ze bijtief?

(a) $f_1(x) = \arcsin(x^2 + 4x - 5)$

(b) $f_2(x) = \arctan(\sqrt{x^2 - 4})$

(c) $f_3(x) = \arccos(x^2 - 7x + 6)$

(d) $f_4(x) = \arctan(x^2 - 8x + 1)$

(e) $f_5(x) = \arccos(-2x^2 - 3x)$

(f) $f_6(x) = \arcsin(x^2 + 4)$

(g) $f_7(x) = \sin(\arccos(x^2))$

12. Toon aan dat volgende uitdrukkingen constant zijn.

(a) $\sin^4 x + \cos^4 x + 2 \cos^2 x \sin^2 x$

(b) $\sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x$

(c) $2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x)$

13. Bewijs volgende identiteiten.

(a) $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$

(b) $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$

(c) $\cos x + \cos 3x - \cos 7x - \cos 9x = 4 \cos x \sin 3x \sin 5x$

(d) $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$

(e) $\sin 4x + 2 \sin 5x + \sin 6x = 4 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \sin 5x$

14. Zoek de oplossingen van volgende vergelijkingen.

(a) $5 \sin^3 x - 2 \sin x - 3 = 0$

(b) $\cos^2 x - 3 \cos x = -2$

(c) $4 \tan^3 x - 16 \tan^2 x - \tan x + 4 = 0$

(d) $6 \sin^2 x + \sin x = 1$

(e) $\cos^2 x + 3 \cos x - 18 = 0$

15. Vraag en aanbod van een goed worden bepaald door:

$$q = D(p) = 1000 - 10p,$$

$$q = S(p) = 15p - 500.$$

(a) Bepaal prijs en verkochte hoeveelheid bij marktevenwicht.

(b) Bepaal de grootte van de procentuele belasting op de aanbieder die de verkoop-prijs doet stijgen met 6.

(c) Wat is het gevolg van een subsidie van 10 aan de aanbieder?

16) geg $q = S(p) \leftrightarrow 6p = q + 48$
 $q = 6p - 48$

a. $q = D(p) = ap + b$

geg: $\begin{cases} a \cdot 30 + b = 200 & (1) \\ a \cdot 27 + b = 250 & (2) \end{cases}$

$\leftrightarrow \begin{cases} 3a = 200 - 250 = -50 & (1-2) \\ b = 200 - 30a \end{cases}$

$\leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{50}{3} \\ b = 200 - 30 \left(-\frac{50}{3}\right) = 200 + 500 = 700 \end{cases}$

$D(p) = -\frac{50}{3}p + 700$

b. marktevenwicht = ME: $D(p) = S(p)$

$\leftrightarrow -\frac{50}{3}p + 700 = 6p - 48$

$\leftrightarrow p_0 = 33$

$\rightarrow$ im Val stehen

? $q_0 = D(p_0) = S(p_0) = 150$

ME: $(p_0, q_0) = (33, 150)$

c. belasting $t = 3,40$ op verkopen

nieuwe $S(p) \rightarrow S_1(p) = S(p - 3,40)$

$= 6(p - 3,40) - 48$

$6p - 20,4 - 48 = 6p - 68,4$

? ME: $D(p) = S_1(p) \leftrightarrow (p_1, q_1) = (33,9; 135)$

$-\frac{50}{3}p + 700 = 6p - 68,4$

$p = 33,9 \rightarrow 6 \cdot 33,9 - 68,4 = 135$

d. ? $P_2 = p_0 + 3 = 36$ als (p_2, q_2) ME
 belasting t verkopen bij $D(p) = S_2(p) = S(p-t)$

ME $\begin{cases} D(p_2) = S_2(p_2) \\ p_2 = p_0 + 3 = 36 \end{cases}$

$$\rightarrow \frac{-50}{3} \cdot 36 + 700 = 6(36 - t) - 48$$

$$\Rightarrow t = \frac{34}{3}$$

e. subsidie verkopen

$$S_3(p) = S(p+2)$$

Doel: $q_3 = q_0 + 24 = 174$

ME $(p_3, q_3) \begin{cases} D(p_3) = S_3(p_3) \\ q_3 = 174 \end{cases}$

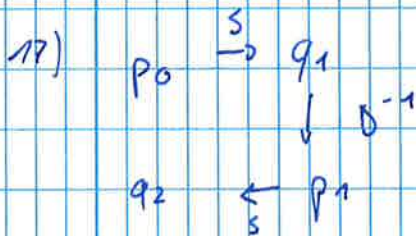
$$D(p) = \frac{-50}{3}p + 700$$

$$174 = \frac{-50}{3}p + 700$$

$$p = 31,56$$

$$S = 5,44$$

$$p_3 = 31,56$$



$$D(p_m) = S(p_{m-1}) = q_m$$

$$p_m = D^{-1}(S(p_{m-1})) = D^{-1}(q_m)$$

spinnweb

$$S? \quad p = S^{-1}(q) = \frac{2q^2 + 2q + 5}{9}$$

$$2q^2 + 2q + 5 - 9p = 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 2(5 - 9p)$$

$$= 72p - 36$$

$$= 36(2p - 1)$$

$$\geq 0 \Leftrightarrow p \geq \frac{1}{2}$$

$$q = \frac{-2 + 6\sqrt{2p-1}}{4} = S(p) \text{ (inverse v. inverse)}$$

$$\rightarrow q = \frac{-1 + 3\sqrt{2p-1}}{2}$$

$$D^{-1}: q = D(p) = \frac{5}{p} \leftrightarrow p = \frac{5}{q} = D^{-1}(q)$$

Spinnenwebmodell : $p_0 = 5$: $q_1 = S(p_0) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{10-1}$
SWM

$$= \frac{8}{2} = 4$$

$$p_1 = D^{-1}(q_1) = \frac{5}{4}$$

$$p_1 = \frac{5}{4} \quad q_2 = S(p_1) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}-1} \approx 1.34$$

$$p_2 = D^{-1}(q_2) = \frac{5}{q_2} \approx 3.74$$

18) $S(p) = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}$

$$D^{-1}(q) = 5 - q$$

zef. machen

ME $(p_0, q_0) = (3, 2)$
SWM

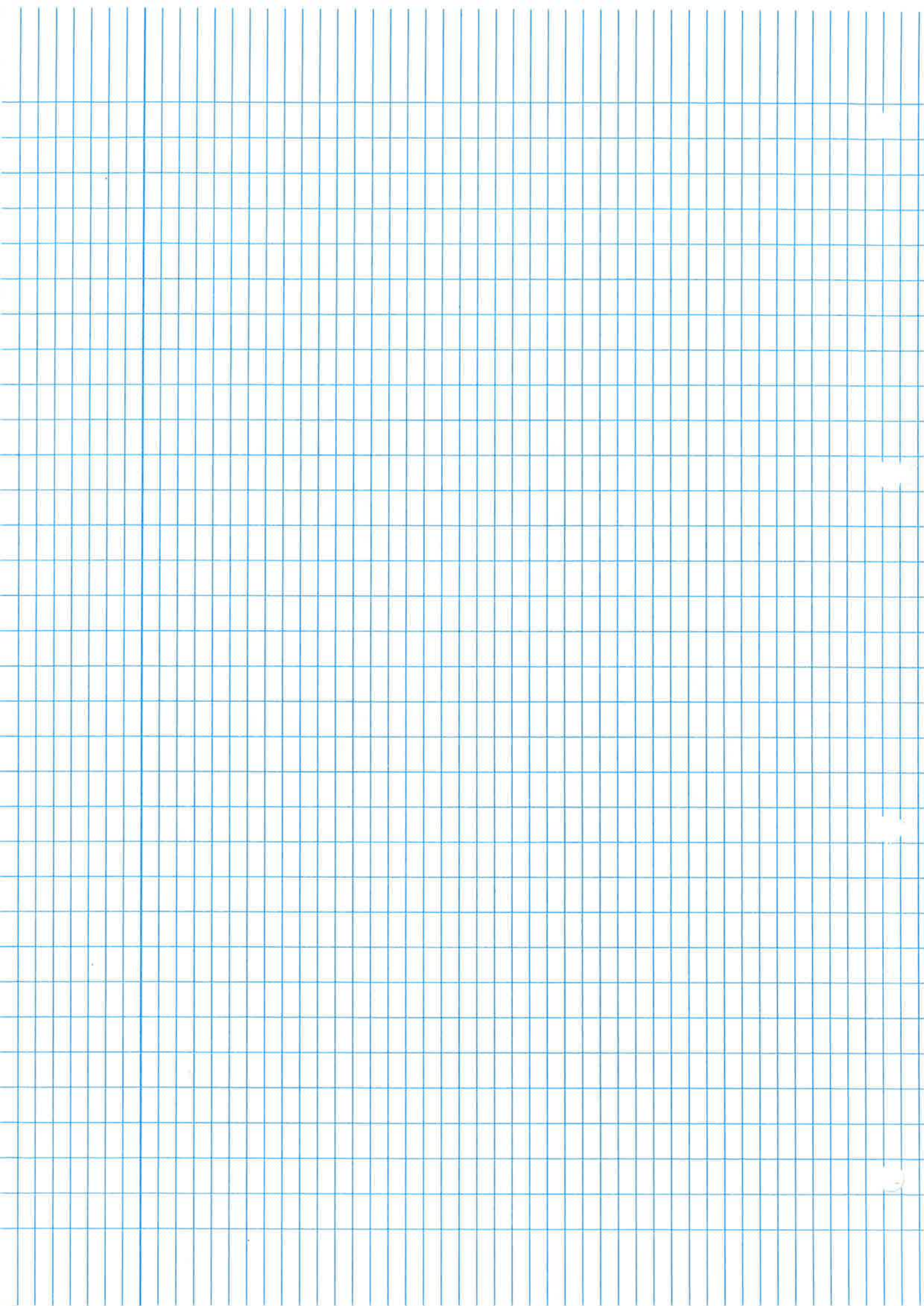
$$p_0 = 4$$

$$q_1 = \frac{5}{2}$$

$$p_1 = \frac{5}{2}$$

$$q_2 = \frac{7}{4}$$

$$p_2 = \frac{13}{4}$$



Maak voor (b) en (c) telkens een grafiek waarop ook de resultaten van (a) te zien zijn.

16. Een verkoper verkoopt stoelen. De vergelijking van de aanbodrechte wordt gegeven door:

$$6p = q + 48.$$

De vraag is lineair verbonden met de prijs. Bij een prijs van \$30 bedraagt de gevraagde hoeveelheid 200 stuks, bij een prijs van \$27 bedraagt de gevraagde hoeveelheid 250 stuks.

- (a) Bepaal de vergelijking van de vraagrechte.
- (b) Bepaal prijs en hoeveelheid bij marktevenwicht.
- (c) Bepaal prijs en hoeveelheid bij marktevenwicht als de verkoper \$3.40 belasting per stuk moet betalen.
- (d) Hoe groot moet de belasting per eenheid zijn op de verkoper om de marktprijs te doen stijgen met \$3.00 t.o.v. het resultaat bekomen onder (b)?
- (e) Hoeveel subsidie per stuk moet er zijn om de vraag met 24 eenheden te doen stijgen t.o.v. het resultaat bekomen onder (b)?

Stel uw oplossing grafisch voor.

17. Voor een product zijn de vraagfunctie en inverse-aanbodfuncties gegeven :

$$D(p) = \frac{5}{p}, \quad S^{-1}(q) = \frac{2q^2 + 2q + 5}{9}.$$

Het product wordt op de markt gebracht voor een initiële prijs van $p_0 = 5$. Stel dat het prijzenverloop zich zoals in het spinnenwebmodel gedraagt. Wat is de prijs p_1 na verloop van een tijdseenheid? Bepaal tevens p_2 .

18. Voor een zeker product zijn de vraag- en aanbodfunctie lineair. De vraagfunctie D wordt bepaald door de vergelijking $p + q = 5$, en de aanbodfunctie S gaat door de punten $(0, 1/2)$ en $(5, 3)$ in het (p, q) -assenstelsel. Bepaal prijs p_e en hoeveelheid q_e bij het marktevenwicht. Als het product tegen een prijs $p_0 = 4$ gelanceerd wordt, bepaal dan de opeenvolgende prijzen p_1, p_2, p_3 .

03/11/16

3 Limieten en continuïteit

$$\text{Def.: } \log_a(b) = c \Leftrightarrow a^c = b$$

$$\text{v.w.: } a > 0 \quad \text{en } a \neq 1 \quad \text{en } b > 0$$

$$\log_a(b) \cdot \log_b(c) = \log_a(c)$$

$$1) \quad a. \quad \log_3(x) = 2 \Leftrightarrow 3^2 = x \quad x = 9$$

$$d. \quad \log_x(3) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^{\frac{1}{2}} = 3 \quad \begin{array}{l} x > 0 \\ x \neq 1 \end{array}$$

$$x = 9$$

$$f. \quad e^{2x-5} + 1 = 4 \Leftrightarrow e^{2x-5} = 3 \quad (\ln = \log_e)$$

$$2x-5 = \ln(3)$$

$$x = \frac{\ln(3) + 5}{2}$$

$$i. \quad \log_x(30 - 4x - x^2) = 2 \Leftrightarrow x^2 = 30 - 4x - x^2$$

$$\text{v.w.: } \begin{array}{l} \cdot x > 0 \\ \cdot x \neq 1 \\ \cdot 30 - 4x - x^2 > 0 \end{array}$$

$$x^2 = 30 - 4x - x^2$$

$$2x^2 + 4x - 30 = 0$$

$$(x=3 \quad \vee \quad x=-5)$$

$$\Rightarrow \text{v.w. 1}$$

$$x = 3 \quad \text{v.w. OK}$$

$$\sqrt{16 + 240} = 16$$

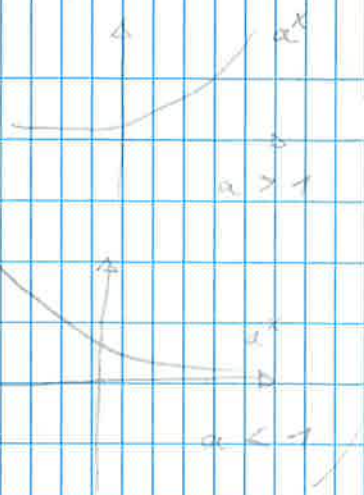
$$\frac{-4 - 16}{4} = \frac{-4 + 16}{4}$$

$$\frac{-20}{4} = \frac{12}{4}$$

$$-5 = 3$$

$$2) b. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$$



we zeichnen im barenste grafisch
dass $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x = +\infty$

$$\text{en } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x = 0$$

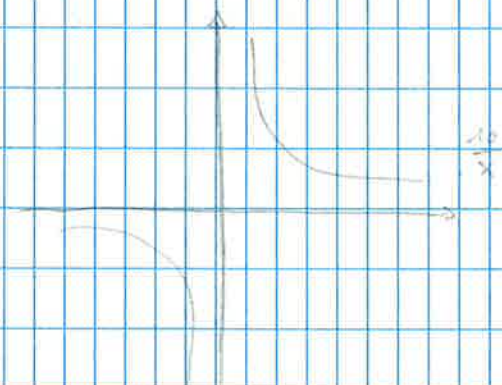
$$c. \lim_{x \rightarrow a} \frac{ax + 10}{x}$$

invullen

$$\frac{a^2 + 10}{a}$$

$$a \neq 0 \rightarrow \frac{a^2 + 10}{a}$$

$$a = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0x + 10}{x}$$



$$LL: \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{10}{x} = \frac{10}{0^-} = -\infty$$

$$RL: \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{10}{x} = \frac{10}{0^+} = +\infty$$

3 Limieten en continuïteit

1. Los volgende vergelijkingen op naar x .

- (a) $\log_3 x = 2$
- (b) $\log x = -1$
- (c) $\ln x = 2$
- (d) $\log_x 3 = \frac{1}{2}$
- (e) $e^{3x} = 2$
- (f) $e^{2x-5} + 1 = 4$
- (g) $\log_x 100 = 2$
- (h) $\ln(x^2 + 3x + 1) = 0$
- (i) $\log_x(30 - 4x - x^2) = 2$

2. Bereken de volgende limieten:

- (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{(-x+2)}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{ax + 10}{x}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - y}{x + y}$ waarbij $y \neq 0$
- (e) $\lim_{t \rightarrow 3} \frac{t^2 + t - 12}{t^2 - 4t + 3}$
- (f) $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2 - 6t + 8}{t^2 - 5t + 6}$
- (g) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x - 3}$
- (h) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{(1/x)}$
- (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - e^x}{e^{(1/x)}}$
- (j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{(1/x)}}$
- (k) $\lim_{h \rightarrow -1} \frac{e^{-h}}{h^3 + 4h + 5}$
- (l) $\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1 + e^{(1/h)}}{e^h}$
- (m) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - x + 1}{5x^6 + 6x^2 + 1}$

$$f. \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2 - 6t + 8}{t^2 - 5t + 6} = \frac{0}{0} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{(t-2)(t-4)}{(t-2)(t-3)} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$i. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - e^x}{e^{\frac{1}{x}}} = \frac{2-1}{e^\infty} = \lim_{x \rightarrow 0} (2 - e^x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}$$

$$LL: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{e^{-\infty}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$RL: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{e^{+\infty}} = 0$$

muß noch mal 1 drin!

$$\lim = 1$$

we müssen das dann auch
x → ∞

$$m. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - x + 1}{5x^6 + 6x^2 + 1} \stackrel{HGT}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^4}{5x^6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3}{5x^2} = 0$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{5x^3 + 6x^2 - 1}{-2x^2 + 2}\right)$$

$$\exp(t) = e^t$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty}$$

"

continue functie

HGT

$$= \exp\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3}{-2x^2}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty}$$

"

$$= \exp\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{5}{2}x\right)$$

$$= "e^{-\frac{5}{2}\infty}" = e^{-\infty}$$

$$= 0$$

$$"e^{+\frac{5}{2}\infty}" = +\infty$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{5x^3 + 6x^2 + 2x - 1}{x^3 - 3}\right)$$

exp. continue

$$\exp\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 6x^2 + 2x - 1}{x^3 - 3}\right)$$

HGT

$$\exp\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3}{x^3}\right) = 5$$

$x \rightarrow \infty$ rat. functie

$$= e^5$$

2 Extra oefeningen

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - 1}{\cos(x) - 1} = \frac{\cos(0) - 1}{\cos(0) - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(x) - \sin^2(x) - 1}{\cos(x) - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\cos^2(x)} - \sin^2(x) - \cancel{\cos^2(x)} - \sin^2(x)}{\cos(x) - \cancel{\cos^2(x)} - \sin^2(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2(x)}{\cos(x) - \cos^2(x) - \sin^2(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(x)}{-\cos(x)}$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$$

opl:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - 1}{\cos(x) - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos^2(x) - 1 - 1}{\cos(x) - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\cos^2(x) - 1)}{\cos(x) - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\cos(x) - 1)(\cos(x) + 1)}{\cos(x) - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2(\cos(x) + 1)$$

$$= 2 \cdot \cos(0) + 2$$

$$= 2 \cdot 1 + 2$$

$$= 4$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x + 1} - \sqrt{x^2 + x - 1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 1} + \sqrt{x^2 + x - 1}}{\sqrt{x^2 + 4x + 1} + \sqrt{x^2 + x - 1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2 + 4x + 1 - (x^2 + x - 1)}{\sqrt{x^2 + 4x + 1} + \sqrt{x^2 + x - 1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{3x + 2}{\sqrt{x^2} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} = -\frac{3}{2}$$

$$\sqrt{1} + \sqrt{1} = 2$$

$$f(x) \quad x \rightarrow +\infty \quad = +$$

$$f(x) \quad x \rightarrow -\infty \quad = -$$

min HGT

10/11/16

$$2) \quad V. \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 3}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(4 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}\right)}}{x-1}$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x-1} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}} \right)$$

$$(\text{extra: } \sqrt{f(x) \cdot g(x)} \neq \sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)})$$

Rien mangen
p mes züm
(-). (-) = +

$$= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x|}{x-1}$$

nu splitsen

$$1. \quad = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} \stackrel{HGT}{=} 2 \cdot \frac{1}{1} = 2$$

$$2. \quad 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x-1} \stackrel{HGT}{=} 2 \cdot \left(\frac{-1}{1} \right) = -2$$

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$X. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 3} - x) = " \infty - \infty "$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 3} + x}{\sqrt{x^2 - 2x + 3} + x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 3} - x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3 - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x + 3} + x}$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 3} - x) = +\infty - (-\infty) = +\infty \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x+x} = -1$$

$$Z \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x})$$

$$+\infty : +\infty - (+\infty) = \infty - \infty$$

$$-\infty : -\infty - (+\infty) = -\infty - \infty$$

$$| A^3 - B^3 = (A - B) \cdot (A^2 + AB + B^2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x}) \cdot \frac{\sqrt[3]{x-1}^2 + \sqrt[3]{x-1} \cdot \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x}^2}{\sqrt[3]{x-1}^2 + \sqrt[3]{x-1} \cdot \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x}^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1-x}{3 \sqrt[3]{x}^2} \quad (\text{analog als oef. v})$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{3 \sqrt[3]{x}^2} = 0$$

$$a.a. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+16} - 4}{x(x-3)} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+16} - 4}{x(x-3)} \cdot \frac{\sqrt{x+16} + 4}{\sqrt{x+16} + 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+16-16}{x(x-3) \cdot (\sqrt{x+16} + 4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x-3) \cdot (\sqrt{x+16} + 4)}$$

$$= -\frac{1}{24}$$

Werkels zowel in teller als

$$t. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} \cdot \frac{\sqrt{x+3} + 2}{\sqrt{x+3} + 2}$$

noemer
wegwerken

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+3-4)(\sqrt{x+1})}{(x-1) \cdot (\sqrt{x+3} + 2)}$$

$$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$3) \quad b. \quad f(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

* def $f : \mathbb{R} \setminus \{1\}$: dus randwaarden : $-\infty, 1, +\infty$

$$* a \in \text{def. } f : \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = \frac{a+2}{a-1}$$

$\hookrightarrow f$ is continu op def f

$$* \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{3}{0} \quad (+ \text{ of } - \infty?)$$

$$LL \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+2}{x-1} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

$$RL \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x-1} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) \stackrel{HGT}{=} \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x}{x} = 1$$

* Tekstverloop

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f(x)$	1	$+$	0	$+$
			$-\infty$	1

$$d. f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - x - 2} = \frac{x^2 + 4}{(x+1)(x-2)}$$

$$* \text{ def } f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$$

f is continu op def f
randpunten: $-\infty, -1, 2, +\infty$

$$u \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$

$$\frac{x^2 + 4}{(x+1)(x-2)} \rightarrow \frac{+}{+} = +$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $-$ $-$
 $+$

$$RL \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$$

$$\frac{+}{+} = -$$

$$LL \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{8}{3.0} = -\infty$$

$$\frac{+}{+} = -$$

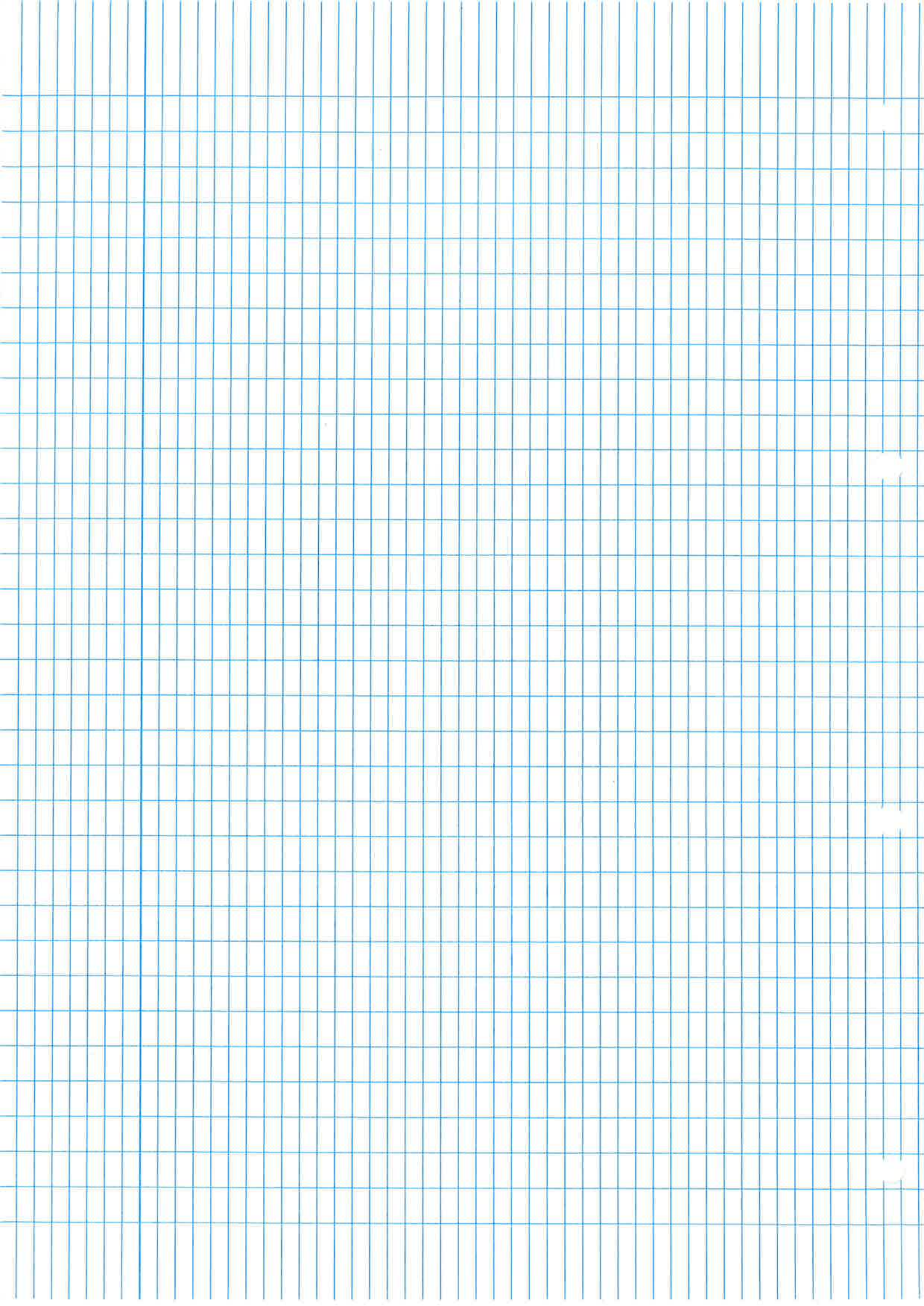
$$RL \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$$

$$\frac{+}{+} = +$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) \stackrel{HGT}{=} 1$$

tekenverloop





- (n) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 6x^2 - 1}{-2x^2 + 2}$
- (o) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 6x^2 + 2x - 1}{x^3 - 3}$
- (p) $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{-3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - x + 1}{5x^6 + 6x^2 + 1}\right)$
- (q) $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{5x^3 + 6x^2 - 1}{-2x^2 + 2}\right)$
- (r) $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{5x^3 + 6x^2 + 2x - 1}{x^3 - 3}\right)$
- (s) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$
- (t) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{x} - 1}$
- (u) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - x + 2} - x}{x - 2}$
- (v) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 3}}{x - 1}$
- (w) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 2}}{x}$
- (x) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x + 3} - x\right)$
- (y) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x-1} - \sqrt{x}\right)$
- (z) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x}\right)$
- (aa) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+16} - 4}{x(x-3)}$
- (ab) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x(x+1)}$

3. Bespreek de continuïteit van de volgende functies en geef de limietwaarden in de (oneigenlijke) randpunten van het definitiegebied. Bespreek tevens het tekenverloop van de functie.

(a) $f(x) = \frac{3x+5}{x^2+4x+4}$

(b) $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$

(c) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

(d) $f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-x-2}$

(e) $f(x) = \log(2x - 5)$

(f) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

Hoofdstuk 4: Afgeleiden

1) b. $R(q) = \text{opbrengst} = q \cdot p = q \cdot D^{-1}(q)$
 $\downarrow$
 $q = D(p)$

$$MR(q) = \frac{d}{dq} R(q)$$

$$D(p) = \frac{1}{p-2} = q \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{q} = p-2 \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{1+2q}{q}$$

$$R(q) = q \cdot p = q \cdot \frac{2q+1}{q} = 2q+1 \rightarrow R'(q) = 2$$

c. $D(p) = \sqrt{20-p^2} = q \quad \Leftrightarrow \quad p = \sqrt{20-q^2}$
vwd: $p \geq 0, q \geq 0$

$$\begin{aligned} R'(q) &= \frac{d}{dq} (q \cdot \sqrt{20-q^2}) = 1 \cdot \frac{1}{2} (20-q^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2q \\ &= \frac{q}{\sqrt{20-q^2}} \end{aligned}$$

$$1 \cdot \sqrt{20-q^2} + q \cdot \frac{1}{2} (20-q^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2q)$$

$$\sqrt{20-q^2} + q \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{20-q^2}} \cdot (-2q)$$

$$= \frac{20-2q^2}{\sqrt{20-q^2}}$$

p. A 10

2) b. $\frac{d}{dx} (\tan^2(e^{-3x}))$

$$x \rightarrow -3x \rightarrow e^{-3x} \rightarrow \tan(e^{-3x}) \rightarrow \tan^2(e^{-3x})$$

$$\left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \right)$$

$$= 2 \tan(e^{-3x}) \cdot \frac{d}{dx} (\tan(e^{-3x}))$$

$$= 2 \tan(e^{-3x}) \cdot \frac{1}{\cos^2(e^{-3x})} \cdot \frac{d}{dx} (e^{-3x})$$

$$= 2 \tan(e^{-3x}) \cdot \frac{1}{\cos^2(e^{-3x})} \cdot e^{-3x} \cdot (-3)$$

$$= \frac{-6 \tan(e^{-3x}) \cdot e^{-3x}}{\cos^2(e^{-3x})}$$

c. $\frac{d}{dx} [\log_5((x^3+x^2)^6)]$

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$$

2 manieren, ofwel 6 keer ofwel via ln.

$$\left(\frac{d}{dx} [\ln f(x)] = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \right)$$

$$\left(\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \right)$$

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{\ln(5)} \cdot \frac{1}{(x^3+x^2)^6} \cdot \frac{d}{dx} [(x^3+x^2)^6]$$

$$\frac{\ln((x^3+x^2)^6)}{\ln 5} \stackrel{\text{cs}}{=} \frac{1}{\ln(5)} \cdot \frac{d}{dx} ((x^3+x^2)^6) = \frac{1}{\ln 5} \cdot \frac{1}{(x^3+x^2)^6} \cdot 6(x^3+x^2)^5 \cdot (3x^2+2x)$$

~~derivative of $\ln(5)$~~

$$= \frac{1}{\ln(5)} \cdot \frac{1}{(x^3+x^2)^6} \cdot 6(x^2+x^3)^5 \cdot (3x^2+2x)$$

$$= \frac{1}{\ln(5)} \cdot \frac{1}{(x^3+x^2)} \cdot 6(3x^2+2x)$$

$$d. \frac{d}{dx} \ln(\sqrt{x^2-1})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{1}{2} (x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{x}{x^2-1}$$

$$e. \frac{d}{dx} [\ln(x + \sqrt{x^2+a^2})]$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+a^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2+a^2}} \right)$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+a^2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2+a^2} + x}{\sqrt{x^2+a^2}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}} = 1$$

$$m. \frac{d}{dx} (x^{x^2})$$

2 manieren

$$= \frac{d}{dx} (e^{\ln(x^{x^2})})$$

$$= \frac{d}{dx} (e^{x^2 \ln(x)})$$

↳ mit regel: $\frac{d}{dx}$

$$= e^{x^2 \ln(x)} \cdot (2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x})$$

$$= x^{x^2} (2x \cdot \ln(x) + x)$$

andere manier:

$$\text{we weten: } \frac{d}{dx} [\ln f(x)] = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

overbrengen

$$\text{dus } \frac{d}{dx} f(x)' = \left(\frac{d}{dx} [\ln f(x)] \right) \cdot f(x)$$

$$= \frac{d}{dx} (x^{x^2})$$

$$= x^{x^2} \cdot \frac{d}{dx} (\ln(x^{x^2}))$$

$$= x^{x^2} \cdot \frac{d}{dx} [x^2 \cdot \ln(x)]$$

$$= x^{x^2} \cdot (2x \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x})$$

$$o. \frac{d}{dx} \left(\underbrace{(3x^2+5)}_{f(x)}^{(e^{x^2}+x)} \right)$$

$$= f(x) \cdot \frac{d}{dx} [\ln f(x)]$$

$$= (3x^2+5)^{(e^{x^2}+x)} \cdot \frac{d}{dx} [(e^{x^2}+x) \cdot \ln(3x^2+5)]$$

$$= (3x^2+5)^{(e^{x^2}+x)} \cdot \left[\underbrace{(e^{x^2} \cdot 2x + 1)}_{\ln(3x^2+5)} + (e^{x^2}+x) \cdot \frac{1}{3x^2+5} \cdot 6x \right]$$

$$p. \frac{d}{dx} [25^{3x^2-6}]$$

problem ook op andere manieren

$$= \ln(25) \cdot 25^{3x^2-6} \cdot (6x)$$

$$r. \frac{d}{dx} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} \right)$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \left(\frac{d}{dx} [\ln f(x)] \right) \cdot f(x)$$

$$(\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)) \quad \left(\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \right)$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} \cdot \frac{d}{dx} \left[\ln \left(\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{(x+1)^{\frac{2}{3}}} \right) \right]$$

$$= " \cdot \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \cdot \ln(1-x^2) - \frac{2}{3} \ln(x+1) \right]$$

$$= " \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(-2x)}{1-x^2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x+1} \right)$$

$$= \frac{-\frac{1}{3} (x+2)}{\sqrt[6]{(x+1)^2} \cdot \sqrt{1-x}}$$

$$9. \quad f(x) = \frac{\sqrt{x-1} \cdot (x+2)^{\frac{5}{3}}}{(x+3)^{\frac{5}{2}}}$$

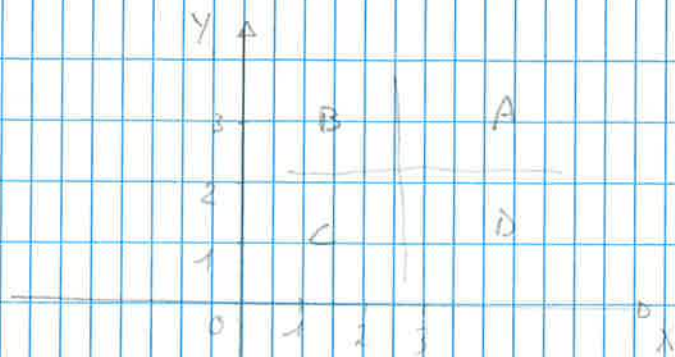
$$= \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \ln(x-1) + \frac{5}{3} \ln(x+2) - \frac{5}{2} \ln(x+3) \right] \cdot f(x)$$

$$= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{x+2} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x+3} \right) \cdot f(x)$$

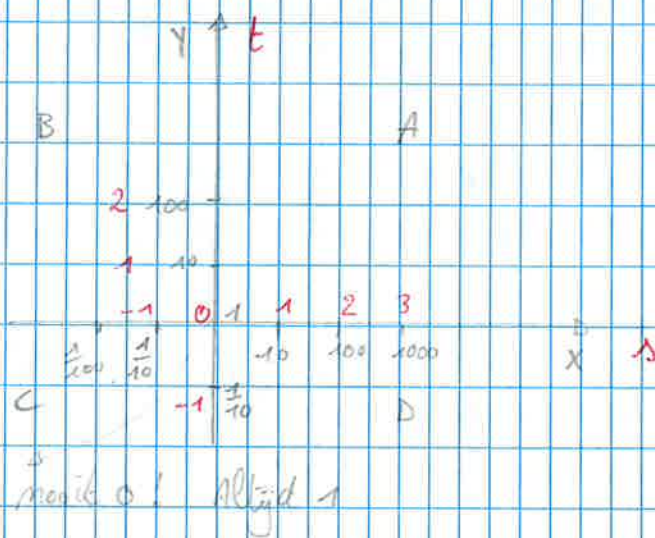
$$= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{x+2} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x+3} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x-1} \cdot (x+2)^{\frac{5}{3}}}{(x+3)^{\frac{5}{2}}} \right)$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{(x^2 - 10x - 9)(x+2)^{\frac{5}{3}}}{\sqrt{x-1} \cdot (x+3)^{\frac{7}{2}}}$$

24/11/16



Rien mogelijk om punt $(1000, -1)$ aan te duiden! Dus nieuw voorstel

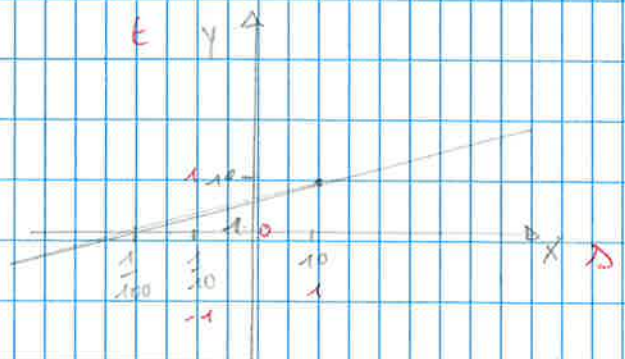


$$\begin{cases} s = \log_{10}(x) \\ t = \log_{10}(y) \end{cases}$$

p. A. 11

5) b. $(x, y) = \left(\frac{1}{100}, 1\right)$

$(x, y) = (10, 10)$



oplossen

$$\begin{cases} (s, t) = (\log(\frac{1}{100}), \log(1)) \\ (s, t) = (\log(10), \log(10)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s, t) = (-2, 0) \\ (s, t) = (1, 1) \end{cases}$$

rechte in (s, t) -stelsel door $(-2, 0)$ en $(1, 1)$

$$t - t_1 = \frac{t_2 - t_1}{s_2 - s_1} (s - s_1)$$

$$t - 0 = \frac{1 - 0}{1 - (-2)} (s - (-2))$$

$$t = \frac{1}{3} (s + 2)$$

$$3t = s + 2$$

vergelijking in (x, y) ?

$$\rightarrow 3 \log_{10}(y) = \log_{10}(x) + 2$$

$$\log_{10}(y^3) = 10^{\log_{10}(x) + 2}$$

$$y^3 = x \cdot 10^2$$

$$y = \sqrt[3]{100x}$$

$$C. (x, y) = \left(\frac{1}{100}, 10\right)$$

$$(x, y) = (10, 1)$$

$$(\lambda, \xi) = (-2, 1)$$

$$(\lambda, \xi) = (1, 0)$$

Rechte im (λ, ξ)

$$\xi - 1 = \frac{0 - 1}{1 - (-2)} (\lambda - (-2))$$

$$\xi - 1 = -\frac{1}{3} (\lambda + 2)$$

$$\xi = -\frac{1}{3} (\lambda + 1)$$

$$\text{vgl } (x, y): \log_{10}(y) = -\frac{1}{3} (\log_{10}(x) - 1)$$

$$y = 10^{-\frac{1}{3}(\log_{10}(x) - 1)}$$

$$y = 10^{\log_{10}(x^{-\frac{1}{3}})} \cdot 10^{\frac{1}{3}}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{10}{x}}$$

$$7) \quad y = \frac{1}{\sqrt[3]{\sin(3x)}}$$

$$\begin{aligned} \text{TB: } y'' + y &= f(y) \\ \Leftrightarrow y'' &= \underbrace{f(y) - y}_{g(y)} \end{aligned}$$

$$y' = \sqrt[3]{\sin(3x)} - 1 \cdot \frac{1}{3} (\sin(3x))^{-\frac{2}{3}} \cdot \cos(3x) \cdot 3$$

$$y = (\sin(3x))^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{\sin^4(3x)}} \cdot \cos(3x) \cdot 3$$

$$= -\cos(3x) \cdot y^4$$

$$y'' = (\sin(3x) \cdot 3) \cdot y^4 + (-\cos(3x)) \cdot 4y^3 \cdot y'$$

We leiten y' nach x
 We weten hat y' is

$$= (\sin(3x) \cdot 3) \cdot y^4 + (-\cos(3x)) \cdot 4y^3 \cdot (-\cos(3x)) \cdot y^4$$

$$= (\sin(3x) \cdot 3) \cdot y^4 + \cos^2(3x) \cdot 4y^7$$

$$\left[y = \frac{1}{\sqrt[3]{\sin(3x)}} = (\sin(3x))^{-\frac{1}{3}} = \sin(3x) = y^{-3} \right]$$

dus

$$= y^{-3} \cdot 3 \cdot y^4 + \cos^2(3x) \cdot 4y^7$$

$$\left[\cos^2(3x) = 1 - \sin^2(3x) = 1 - y^{-6} \right]$$

$$= 3y + (1 - y^{-6}) \cdot 4y^7$$

$$= 3y + 4y^7 - 4y$$

$$= 4y^7 - y$$

$$\Leftrightarrow y'' + y = 4y^7$$

$$8) \quad b. \quad \frac{E f(x)}{E x} = \frac{\frac{d}{dx} f(x)}{\frac{f(x)}{x}} = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} = x \frac{d}{dx} [\ln f(x)]$$

$$f \text{ is elastisch im } x_0 \Leftrightarrow \left| \frac{E f}{E x}(x_0) \right| > 1$$

$$f(x) = \frac{(x+1)^2 (x^2+5x+6)}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\begin{aligned} \frac{E f}{E x}(x) &= x \frac{d}{dx} \left[2 \ln(x+1) + \ln(x^2+5x+6) - \frac{3}{2} \ln(x-1) \right] \\ &= x \left[\frac{2}{x+1} + \frac{2x+5}{x^2+5x+6} - \frac{3}{2} - \frac{1}{x-1} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{E f}{E x}(2) = 2 \left(\frac{2}{3} + \frac{4+5}{4+10+6} - \frac{3}{2} - \frac{1}{1} \right)$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{18}{20} - \frac{6}{4}$$

$$= -\frac{23}{30}$$

$$\left| \frac{E f}{E x}(2) \right| < 1 \rightarrow \text{nicht elastisch im } x=2$$

$$c. \quad f(x) = \frac{(x-6)^{\frac{4}{3}} (x+3)^{\frac{5}{2}}}{(x^2+3x+4)^{\frac{6}{5}}}$$

$$\frac{E f}{E x}(x) = x \frac{d}{dx} \left[\frac{4}{3} \ln(x-6) + \frac{5}{2} \ln(x+3) - \frac{6}{5} \ln(x^2+3x+4) \right]$$

$$= x \left[\frac{4}{3} \frac{1}{x-6} + \frac{5}{2} \frac{1}{x+3} - \frac{6}{5} \frac{2x+3}{x^2+3x+4} \right]$$

$$\begin{aligned}
 \frac{E f}{E x}(2) &= 2 \left[\frac{4}{3} - \frac{1}{-4} + \frac{5}{2} - \frac{1}{5} - \frac{6}{5} \cdot \frac{4+3}{4+3+4} \right] \\
 &= 2 \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{11} \right) \\
 &= -\frac{2}{3} + 1 - \frac{84}{55} \\
 &= -\frac{13}{15}
 \end{aligned}$$

→ niet elastisch $1 - \frac{13}{15} < 1$

9) d. $f(x) = \frac{1}{x^2-4} = (x^2-4)^{-1}$

mit een
zender in
(andere manier)

$$\begin{aligned}
 \frac{E f}{E x}(x) &= x \cdot \frac{-1}{(x^2-4)^2} \cdot 2x \cdot (x^2-4) \\
 &= \frac{-2x^2}{x^2-4}
 \end{aligned}$$

(Handwritten notes: $x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$ and $\frac{f'(x)}{f(x)}$ are shown with arrows pointing to the derivative calculation.)

Voor welke x elastisch?

geval 1: $\frac{E f}{E x}(x) > 1 \Leftrightarrow \frac{-2x^2}{x^2-4} > 1$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x^2}{x^2-4} - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x^2}{x^2-4} - \frac{x^2-4}{x^2-4} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3x^2+4}{x^2-4} > 0$$

X		-2	$-\sqrt{\frac{4}{3}}$		$\sqrt{\frac{4}{3}}$		2	
T	-	-	-	0	+	0	-	-
N	+	0	-	-	-	-	0	+
T	-	+	0	-	0	+	+	-

$$> 0 \Leftrightarrow x \in]-2, -\sqrt{\frac{4}{3}}[\cup]\sqrt{\frac{4}{3}}, 2[$$

Gesamt 2: $\frac{EP}{TO} \frac{EX}{EX} (x) < -1 \Leftrightarrow \frac{-2x^2}{x^2-4} < -1$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2-4}{x^2-4} < 0$$

X		-2		2	
T	-	-	-	-	-
N	+	0	-	0	+
T	-	+	+	+	-

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$$

oplossing: f is elastisch

$$x \in]-\infty, -2[\cup]-2, -\sqrt{\frac{4}{3}}[\cup]\sqrt{\frac{4}{3}}, 2[\cup]2, +\infty[$$

$$a. f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2}$$

Point

kurz zelf, achten op uitgewerkte oplossing.

$$\frac{\epsilon_f}{\epsilon_x} f(x) = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} = x \cdot \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x(x-1)^2(x+1)}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$= x$$

① elastisch als $|\frac{\epsilon_f}{\epsilon_x}| > 1$

$$x > 1$$

$$x-1 > 0$$

x	1
$x-1$	$- \quad 0 \quad +$

$$> 0 \Leftrightarrow x \in]1, +\infty[$$

② inelastisch als $|\frac{\epsilon_f}{\epsilon_x}| < 1$

$$x < 1$$

$$x-1 < 0$$

$$\text{dus } x \in]-\infty, 1[$$

01/12/16

Aanvullende oefeningen H4.

$$1) \cdot q = D(p) = -ap + b, \quad a, b > 0$$

$$p_0 = 10, \quad p_0 \rightarrow p_0 + \frac{1}{10} p_0 \Rightarrow q_0 - \frac{5}{100} q_0$$

$$\frac{\frac{ED}{E_p}}{E_p} = p \cdot \frac{D'(p)}{D(p)} = \frac{p(-a)}{-ap + b}$$

$$\frac{\frac{ED}{E_p}}{E_p}(p_0) = \frac{\text{relatieve Edname } D(p_0)}{\text{relatieve Edname } p} = \frac{-\frac{5}{100}}{\frac{1}{10}} = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Voor } p = p_0 = 10 \Rightarrow \frac{-a \cdot 10}{-10a + b} = -\frac{1}{2}$$

$$20a = -10a + b$$

$$30a = b$$

$$D(p) = -ap + 30a$$

$$= a(30 - p)$$

$$\frac{\frac{ED}{E_p}}{E_p}(p) = \frac{-ap}{-ap + 30a}$$

$$= \frac{-ap}{a(30 - p)}$$

$$= \frac{-p}{30 - p} = \frac{p}{p - 30}$$

Methode 2: $q_0 = -ap_0 + b$

$$q_0 - \frac{5}{100} q_0 = -a \left(p_0 + \frac{1}{10} p_0 \right) + b$$

$$\begin{aligned}
 & 1 \left\{ q_0 = -10a + b \right. \\
 & 2 \left\{ q_0 - \frac{5}{100} q_0 = \frac{35}{100} q_0 = -11a + b \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad -a(p_0 + \frac{1}{10} p_0) + b \\
 & \qquad \qquad \qquad -a(10 + \frac{1}{10} \cdot 10) + b \\
 & \qquad \qquad \qquad -a \cdot 11 + b
 \end{aligned}$$

$$L_0 \quad \frac{35}{100} (-10a + b) = -11a + b$$

$$-\frac{35}{10} a + \frac{35}{100} b + 11a - b = 0$$

$$\frac{15}{10} a - \frac{5}{100} b = 0$$

$$\frac{150}{100} a - \frac{5}{100} b = 0$$

$$150a - 5b = 0$$

$$b = 30a$$

procent. daling D > procent. stigging p
 - relat. afname D > relat. faldname p
faldname

> 0

$$-\frac{\text{relat. faldname D}}{\text{relat. faldname p}} > 1$$

$$-\frac{ED}{EP} > 1$$

$$-\frac{p}{p-30} > 1$$

$$-\frac{p}{p-30} - 1 > 0$$

$$-\frac{p}{p-30} - \frac{p+30}{p-30} > 0$$

$$-\frac{2p+30}{p-30} > 0$$

$$\frac{2(15-p)}{p-30} > 0$$

↓
f(p)

p		15		30	
15-p	+	0	-	-	-
p-30	-	-	-	0	+
f(p)	-	0	+	∞	-

Wanneer > 0 ?

Antw: $15 < p < 30$

Max prijs eieren

$$D(p) = (30-p) \cdot a$$

$$p_{\max} = 30$$

2)

$$S(p) = ap + b$$

, a < b cst

zekere prijs p_0 : elasticiteit $\eta > 1$
enkel productie $\Leftrightarrow p > p_0 \left(1 - \frac{1}{\eta}\right)$

$$\frac{E_s}{E_p} = p \cdot \frac{S'(p)}{S(p)} = \frac{ap}{ap+b} = \eta(p)$$

Geg: $\frac{ap_0}{ap_0+b} > 1$

productie als $S(p) \geq 0$

$$p > -\frac{b}{a}$$

en $p > 0$

$$\begin{aligned}
 \eta(p_0) &= \frac{ap_0}{ap_0 + b} \rightarrow p_0 \left(1 - \frac{1}{\eta}\right) \\
 &= p_0 \left(1 - \frac{ap_0 + b}{ap_0}\right) < 1 \\
 &= p_0 \left(\frac{ap_0 - ap_0 - b}{ap_0}\right) \\
 &= -\frac{b}{a} > 0
 \end{aligned}$$

3) MWS Lagrange: f continu in $[a, b]$

$$\begin{aligned}
 &\rightarrow \exists x_0 \in]a, b[\\
 &\rightarrow f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}
 \end{aligned}$$

a. $f(x) = \frac{2}{x}$, $[2, 6]$

f continu in $[2, 6]$
 ableitb. in $]2, 6[$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2}$$

$$\begin{aligned}
 \xrightarrow{\text{MWS}} \exists x_0 \in]2, 6[, \quad -\frac{2}{x_0^2} &= \frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} \\
 &= \frac{\frac{2}{6} - \frac{2}{2}}{4} \\
 &= -\frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow -\frac{2}{x_0^2} = -\frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 = 12$$

$$\rightarrow x_0 = -2\sqrt{3} \quad \vee \quad 2\sqrt{3} \approx 3,4$$

$$b. \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \quad [-1, 1]$$

$$f \text{ continu in } [-1, 1], \quad f'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

$\rightarrow f$ niet afleidbaar in 0
 $\rightarrow$ MWS niet v. toepassing

$$c. \quad f(x) = \sqrt{9+x^2}, \quad [0, 4]$$

$$\rightarrow f \text{ is continu in } [0, 4]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (9+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$f(4) = \sqrt{25} = 5$$

$$f(0) = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{MWS: } \exists x_0 \in]0, 4[\rightarrow f'(x_0) = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0}$$

$$\rightarrow \exists x_0 : \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+9}} = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$$

$$2x_0 = \sqrt{x_0^2 + 9}$$

Kwadr: $4x_0^2 = x_0^2 + 9$

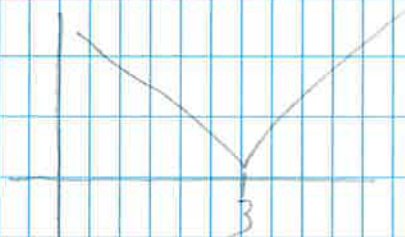
$$3x_0^2 = 9$$

$$x_0^2 = 3$$

$$x_0 = \sqrt{3} \quad \vee -\sqrt{3}$$

d. $f(x) = |x-3|$ in $[0,5]$

f continu in $[0,5]$



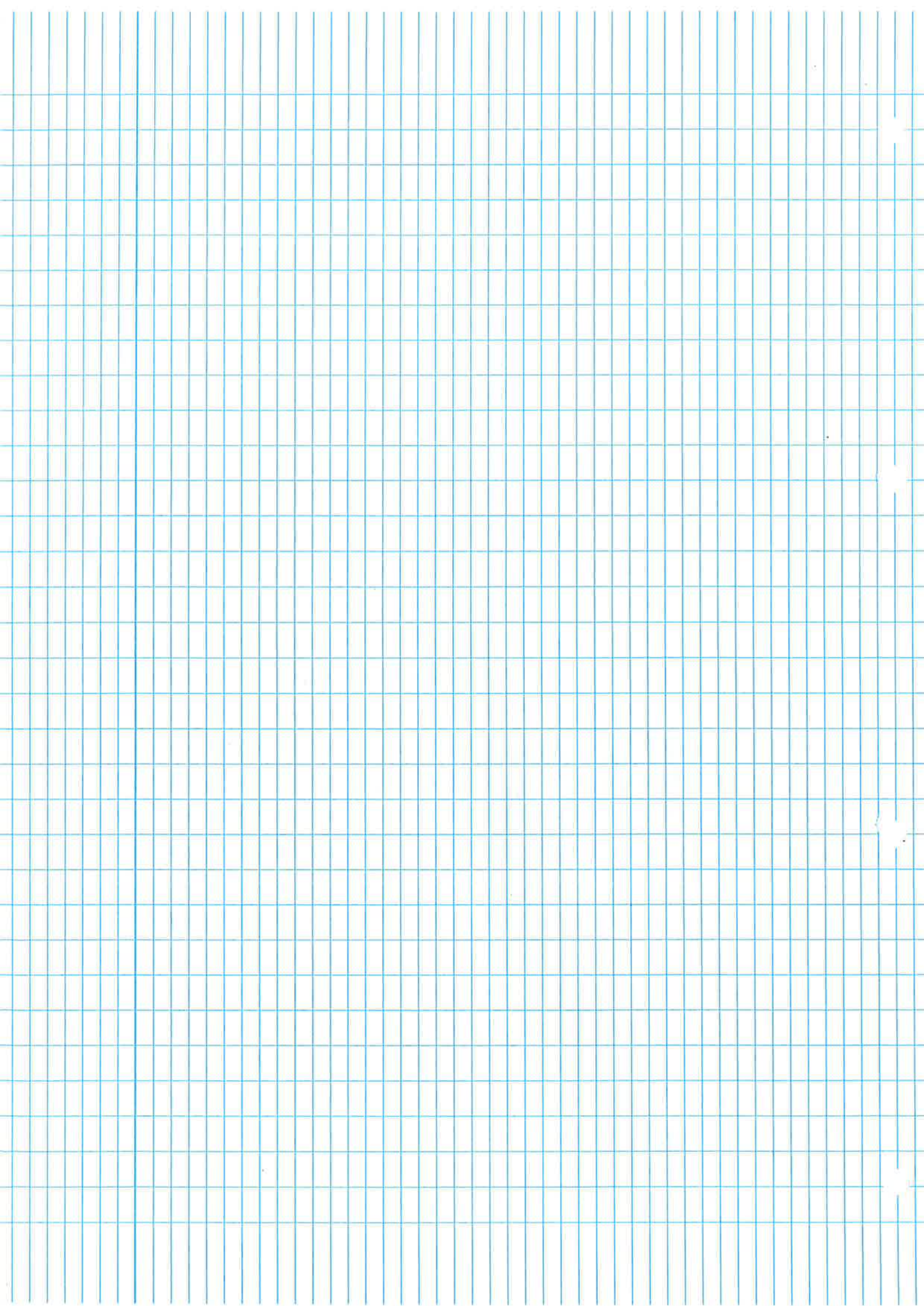
f niet afleidbaar!

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} 3-x, & x < 3 \\ x-3, & x \geq 3 \end{cases}$$

~~MWS~~



4 Afgeleiden

1. Bepaal voor elk van de gegeven vraag- of inverse-vraagfuncties de marginale-opbrengstfunctie $R'(q)$.

(a) $D(p) = 20 - \ln(p)$

(b) $D(p) = \frac{1}{p-2}$

(c) $D(p) = \sqrt{20 - p^2}$

(d) $D^{-1}(q) = \frac{\pi}{2} - \arctan(q)$

2. Bereken de afgeleide functie van volgende functies:

(a) $f(x) = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

(b) $f(x) = \tan^2(e^{-3x})$

(c) $f(x) = \log_5(x^3 + x^2)^6$

(d) $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 - 1})$

(e) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$

(f) $f(x) = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$

(g) $f(x) = \log_{10}\left(\frac{x}{x+1}\right)$

(h) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

(i) $f(x) = \ln\left(\frac{1-4x}{1+4x}\right)$

(j) $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 1}{x - 6}$

(k) $f(x) = \frac{2x}{3x^2 + 1}$

(l) $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$

(m) $f(x) = a^x x^a$

(n) $f(x) = x^{x^2}$

(o) $f(x) = (3x^2 + 5)^{e^{x^2} + x}$

(p) $f(x) = 25^{3x^2 - 6}$

(q) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1} \sqrt[3]{(x+2)^5}}{\sqrt{(x+3)^5}}$

(r) $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

- (s) $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{4x^2+1}}$
- (t) $f(x) = \log_2 \left(\sqrt{\cos^2(2x)+4} \right)$
- (u) $f(x) = \frac{1}{5^{-5x^2+x+1}}$
- (v) $f(x) = \log_2 \left(\sqrt[3]{3x^2-1} \right)$

3. Ga na dat in een semilogaritmisch coördinatenstelsel met logaritmische x -as en affine y -as de volgende functie een rechte als grafiek heeft:

$$f(x) = \log_{10}(bx^a).$$

4. T.o.v. het *overeenkomstig affien assenstelsel* heeft de functie f als vergelijking $y_1 = 2x_1 + 2$. Wat is de vergelijking van f t.o.v. het originele dubbellogaritmische coördinatenstelsel?
5. Stel de vergelijking op van de kromme f waarvan de dubbellogaritmische grafiek (met grondtal 10) een rechte is gaande door de punten met dubbellogaritmische coördinaat

- (a) $(1, 10)$ en $(10, \frac{1}{100})$
- (b) $(\frac{1}{100}, 1)$ en $(10, 10)$
- (c) $(\frac{1}{100}, 10)$ en $(10, 1)$

6. Ga na of de semilogaritmische grafiek van de functie $f(x) = \frac{3}{\sqrt[5]{10^{4x}}}$ evenwijdig is met de affine grafiek van de marginale-opbrengstfunctie, als de opbrengstfunctie impliciet gegeven wordt door $\frac{2}{5}x^2 - 3x + y - 1 = 0$. Het semilogaritmische coördinatenstelsel met grondtal 10 heeft een affine x -as en een logaritmische y -as.

7. Zij $y = \frac{1}{\sqrt[3]{\sin(3x)}}$. Druk $y'' + y$ uit in functie van y .

8. Gegeven:

- (a) $f_1(x) = \frac{(x+6)^{\frac{4}{3}}(x+8)^{\frac{5}{2}}}{(x^2+3x+4)^{\frac{7}{5}}}$
- (b) $f_2(x) = \frac{(x+1)^2(x^2+5x+6)}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}$
- (c) $f_3(x) = \frac{(x-6)^{\frac{4}{3}}(x+3)^{\frac{5}{2}}}{(x^2+3x+4)^{\frac{6}{5}}}$

- Gevraagd: (i) Bereken de elasticiteit van de functie f_i in $x = 2$.
(ii) Is deze functie f_i elastisch of inelastisch voor $x = 2$?

p. A. 12

$$10) \quad a. \quad f(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + \dots + \frac{f^{(m-1)}(a)(x-a)^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{f^{(m)}(\theta)(x-a)^m}{m!}$$

$$f(x) = (1+x)^p \quad \text{Taylor round } 0=a, \quad p \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = p(1+x)^{p-1}$$

$$f''(x) = p(p-1) \cdot (1+x)^{p-2}$$

$$f^{(i)}(x) = p(p-1) \dots (p-(i-1)) (1+x)^{p-i}$$

$$\rightarrow f'(0) = p$$

$$f''(0) = p(p-1)$$

$$f^{(i)}(0) = p(p-1) \dots (p-i+1)$$

$$\rightarrow (1+x)^p = 1 + \frac{px}{1!} + \frac{p(p-1)}{2!} x^2 + \dots$$

$$+ \frac{p(p-1) \dots (p-m+2)}{(m-1)!} x^{m-1}$$

$$+ p(p-1) \dots (p-m+1) (1+\theta)^{p-m} x^m$$

$$\theta \in [0, x]$$

$$c. f(x) = x \ln \sqrt{1+x} = \frac{x}{2} \ln(1+x)$$

$$= \frac{x}{2} \cdot \ln(1+x)$$

Taylorontwik. rond 0

$$\text{Stel: } g(x) = \ln(1+x)$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$= (1+x)^{-1} = R(x)$$

$$R^{(i)}(x) = (-1)(-2) \dots (-i)(1+x)^{-1-i}$$

(zie 10. a.)

$$g^{(i+1)}(x) \rightarrow g^{(i+1)}(0) = (-1)(-2) \dots (-i) = (-1)^i \cdot i!$$

$$\rightarrow g^{(i)}(0) = (-1)^{i-1} \cdot (i-1)!$$

$$\rightarrow \ln(1+x) = \ln 1 + \frac{g^{(1)}(0) \cdot x}{1!} + \dots + \frac{g^{(m-2)}(0)}{(m-2)!} x^{m-2}$$

$$+ \frac{g^{(m-1)}(0)}{(m-1)!} x^{m-1}$$

$$= 0 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{m-1}(m-2)!}{(m-1)!} x^{m-1}$$

(1+0)^{1-m}

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots (-1)$$

↳ Dit klopt niet

08/12/16

volgende les: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{1}{(1+0)^4}$

11) a. $\ln(1,02) = \ln(1 + \frac{2}{100})$

$$= \frac{2}{100} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{10000} \right) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{8}{1000000} \right) - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{16}{100000000} \right) + \frac{1}{(1+0)^4}$$

als we een benadering willen, dan laatste termen vallen

$$= 0,02 - 0,0002 + 0,000002666...$$

$$= 0,019802666...$$

tot hier allemaal juist

12) b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2} = \frac{0}{0}$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \quad \frac{0}{0}$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

c. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1} \right) = \begin{matrix} \text{"} \infty - \infty \text{"} \\ x \rightarrow 1^- & -\infty - (-\infty) \\ x \rightarrow 1^+ & +\infty - (+\infty) \end{matrix}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1 - \ln(x)}{\ln(x)(x-1)} = \frac{0}{0}$$

$$H = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}(x-1) + \ln(x) \cdot 1}$$

= 2 teller & nölner

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1) + \ln(x) \cdot x} = \frac{0}{0}$$

$$H = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + \frac{1}{x} + \ln(x) \cdot 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + 1 + \ln(x)}$$

$$= \frac{1}{1+1+0}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$g. \lim_{x \rightarrow 0} (\tan^2 x)^{\sin(x)} = 0^0 = L$$

$$\ln(L) = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \sin(x) \ln(\tan x) = "0 \cdot (-\infty)"$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\tan(x))}{\frac{1}{\sin(x)}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$H = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\tan(x)} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}}{-\sin^{-2}(x) \cdot \cos(x)}$$

$$\tan x = \frac{\sin}{\cos} \quad \text{dus} \quad x = \cos \quad \sin$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos}{\sin} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}}{-\sin^{-2}(x) \cdot \cos(x)}$$

$$\frac{-2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos}{\sin} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} \cdot (1 - \sin^2(x))}{\cos(x)}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{dus } L = e^{\ln(L)} = e^0 = 1$$

$$R. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x \sin 2x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) \cdot 3}{1 \cdot \sin(2x) + x \cos(2x) \cdot 2} = \frac{0}{0}$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 \cos(3x)}{2 \cos(2x) + 2 \cos(2x) + 2x (1 - \sin(2x) \cdot 2)} = \frac{9}{4}$$

$$R. \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{1}{x-1}} \quad "1^\infty" = L$$

$$\ln(L) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \ln(2-x) = \frac{0}{0}$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2-x} (-1)}{1} = -1$$

$$L = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$l. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^{\lambda x} - 1)}{e^{\mu x} - 1 - \mu x} = \frac{0}{0}$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\lambda x} - 1 + x \cdot e^{\lambda x} \cdot \lambda}{e^{\mu x} - 1 - \mu x} = \frac{0}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\lambda x} \cdot \lambda + e^{\lambda x} \cdot \lambda + x e^{\lambda x} \cdot \lambda^2}{e^{\mu x} - 1 - \mu x}$$

$$= \frac{2\lambda}{\mu^2}$$

$$o. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{x}{3}} = "(\infty + 0)^{\infty}" = "\infty^{\infty}" = L$$

$$\ln(L) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{3} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = "\infty \cdot 0"$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{0}$$

$$\stackrel{H}{=} \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot (-2 \cdot \frac{1}{x^3})}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{2}{x^3}\right)}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{2}{x^3}\right) \cdot (-x^2)}{1}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x + \frac{1}{x}}$$

normal quick bezug

$$\neq = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\stackrel{H}{=} \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} = 0$$

$$\hookrightarrow e^0 = 1$$

$$p. \lim_{x \rightarrow 1} (2-x^2)^{\cos(\frac{\pi x}{2})} = "1^\infty" = L$$

$$\ln(L) = \lim_{x \rightarrow 1} \cos(\frac{\pi x}{2}) \cdot \ln(2-x^2) = "\infty \cdot 0"$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\frac{\pi x}{2})}{\cos(\frac{\pi x}{2})} \ln(2-x^2) =$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow 1} \sin(\frac{\pi x}{2}) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2-x^2)}{\cos(\frac{\pi x}{2})} \right) = \frac{0}{0}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=1}$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 \cdot (-2x)}{2-x^2} = \frac{-2}{-\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}$$

$$L = e^{\frac{4}{\pi}}$$

9. Bepaal voor elk van de volgende functies het gebied waar de functie elastisch is. Maak zo nodig een schets van de grafiek van f en $\frac{Ef}{Ex}$

(a) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

(b) $f(x) = x^3 - 1$

(c) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$

(d) $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$

10. Toon volgende formule van Taylor (met sluitterm van orde n) met $a = 0$ en $\theta \in [0, x]$ aan :

(a) $(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!} x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!} (1+\theta)^{p-n} x^n$

(b) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots + (-1)^n (1+\theta)^{-1-n} x^n$

(c) $x \ln \sqrt{1+x} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{2(1+\theta)^n n!} x^{n+1}$

11. Maak gebruik van de formule van Taylor (met sluitterm van orde 4) om volgende functiewaarden te benaderen :

(a) $\ln(1.02)$ (≈ 0.01980)

(b) $\sqrt[3]{0.95}$ (≈ 0.983)

(c) $\sqrt{1 + \sin(0.1)}$ (≈ 1.048)

12. Bereken de volgende limieten:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(1-x)}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} \right)$

(e) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1} \right)$

(f) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\sqrt{2-x^2} - 1 \right)^{x-1}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\tan^2(x) \right)^{\sin(x)}$

(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{x \sin(2x)}$

- (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$
- (j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 3e^{2x} + e^{6x}}{4x^2}$
- (k) $\lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\frac{1}{x-1}}$
- (l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^{\lambda x} - 1)}{e^{\mu x} - 1 - \mu x}$
- (m) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{\ln(x \cdot e)}{\ln(x)} \right)^{\ln(x^2)}$
- (n) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^3)^{1/x^2}$
- (o) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{x/3}$
- (p) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (2 - x^2)^{\tan(\frac{\pi x}{2})}$

15/12/16

Voorbeldexamen oefeningen.

1)

$$\text{def}(\arctan) = \mathbb{R}$$

$$\text{def}(\ln) =]0, +\infty[$$

$$\text{VWD: } \frac{x}{x-1} > 0$$

x	0	1		
x	-	0	+	+
$x-1$	-	-	-	0
$\frac{x}{x-1}$	+	0	-	+

$$\text{def}(f) =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$$

$$y = \arctan\left(\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right)$$

$$\tan(y) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{VWD: } y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\quad (\text{im}(\arctan)) \\ e^{\tan(y)} = \frac{x}{x-1} \end{array} \right)$$

$$e^{\tan(y)}(x-1) = x$$

$$e^{\tan(y)} \cdot x - x = e^{\tan(y)}$$

$$x = \frac{e^{\tan(y)}}{e^{\tan(y)} - 1}$$

$$+ \text{VWD: } e^{\tan(y)} - 1 \neq 0$$

$$y \neq k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ima}(f) = \text{def}(f^{-1}) =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\}$$

Het is een functie (je krijgt 1 x terug)
 $\Rightarrow$ injectie

$$\begin{aligned} 2) \quad a. \quad f'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{e^x - 5}{e^x + 1}\right)^2}} \cdot \frac{e^x(e^x + 1) - (e^x - 5) \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{-(e^x + 1)}{\sqrt{(e^x + 1) - (e^x - 5)^2}} \cdot \frac{6e^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{-6e^x}{\sqrt{12e^x - 24} (e^x + 1)} \end{aligned}$$

$$b. \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \arctan\left(\frac{\cos(x) - 1}{x - \pi}\right) \quad \text{"arctan}\left(\frac{-2}{0}\right)"$$

$$LL: \lim_{\substack{x \rightarrow \pi \\ <}} \arctan\left(\frac{\cos(x) - 1}{x - \pi}\right) \quad \text{"arctan}\left(\frac{-2}{0^-}\right)" = \frac{\pi}{2}$$

$$RL: \lim_{\substack{x \rightarrow \pi \\ >}} \arctan\left(\frac{\cos(x) - 1}{x - \pi}\right) \quad \text{"arctan}\left(\frac{-2}{0^+}\right)" = -\frac{\pi}{2}$$

$$c. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right) \quad \text{"}\infty - \infty\text{"}$$

$$x \rightarrow 0 \quad -\infty - (-\infty) = -\infty + \infty$$

$$x \rightarrow 0 \quad +\infty - (+\infty) = \infty - \infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x \sin(x)} \quad " \frac{0}{0} "$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x) + x \cos(x)} \quad " \frac{0}{0} "$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{\cos(x) + \cos(x) + x(-\sin(x))} = \frac{0}{2}$$

$$= 0$$

3)

$$S(p) = \sqrt{2p+20}$$

$$D^{-1}(q) = \sqrt{100 - 4q^2}$$

$$D(p) = ?$$

$$p = \sqrt{100 - 4q^2}$$

$$p^2 = 100 - 4q^2$$

$$p^2 - 100 = -4q^2$$

$$\frac{p^2 - 100}{-4} = q^2$$

$$q = \sqrt{-\frac{p^2 - 100}{4}}$$

$$q = \frac{1}{2} \sqrt{100 - p^2}$$

$$a. D(p) = S(p)$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{100 - p^2} = \sqrt{2p+20}$$

$$\frac{1}{4} (100 - p^2) = 2p + 20$$

$$25 - \frac{1}{4} p^2 = 2p + 20$$

$$-\frac{1}{4} p^2 - 2p + 5 = 0$$

$$p^2 + 8p - 20 = 0$$

$$VWD: p \geq 0$$

$$\text{def } D(p) = p \in [-10, 10] \\ = p \in [0, 10]$$

$$p = 2 \quad \vee \quad p = 10$$

dus p bij $ME = 2$

$q_c = ?$

$$\text{invullen in } D(p_c) = S(p_c)$$

$$\sqrt{2 \cdot 2 + 20} = \sqrt{24}$$

$$b. \quad \frac{E_D}{E_p}(p) = \frac{\frac{dD}{dp}}{\frac{D}{p}} = p \cdot \frac{D'}{D} = p \cdot [\ln(D)]'$$

$$D(p) = \frac{\sqrt{100 - p^2}}{2}$$

$$= p \cdot \frac{2}{\sqrt{100 - p^2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-2p}{2\sqrt{100 - p^2}}$$

$$= \frac{-p^2}{100 - p^2}$$

$$\left| \frac{-p^2}{100 - p^2} \right| > 1$$

2 gevallen

$$\left| \frac{E_D}{E_p} \right| > 1$$

$$\left| \frac{E_D}{E_p} \right| < 1$$

$$\frac{-p^2}{100 - p^2} > 1 \rightarrow \text{kan niet als } p \in [0, 10]$$

$$\text{of } \frac{-p^2}{100 - p^2} < -1$$

$$\frac{-p^2 + 100 - p^2}{100 - p^2} < 0$$

$$100 < 2p^2$$

$$p^2 > 50$$

$$p > \sqrt{50}$$

= \sqrt{50}

preisintervall $D(p)$ elastisch: $] 5\sqrt{2}, 10[$

$$C. \quad S(p)' = \frac{1}{2} (2p+20)^{-\frac{1}{2}}$$

$$S(p) = \sqrt{2p+20} \quad = \quad \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2p+20}} \cdot 2$$

$$\frac{ES}{EP}(p) = p \cdot \frac{d}{dp} (\ln(S(p))) = p \cdot \frac{1}{2} \frac{2}{2p+20} = \frac{p}{2p+20}$$

p zonal $\left| \frac{ED}{EP}(p) \right| = 2 \cdot \frac{ES}{EP}(p)$

$$\left| \frac{-p^2}{100-p^2} \right| = \frac{2p}{2p+20}$$

$$p \in [0, 10[$$

$$\hookrightarrow \frac{p^2}{100-p^2} = \frac{2p}{2p+20}$$

$$p^2(2p+20) = 2p(100-p^2)$$

$$2p^3 + 20p^2 = 200p - 2p^3$$

$$4p^3 + 20p^2 - 200p = 0$$

of

$$\frac{p^2}{(20-p)(20+p)} - \frac{p}{p+10} = 0$$

$$\frac{p^2 - (10-p) \cdot p}{(10-p)(10+p)} = 0$$

$$\frac{(2p - 10)p}{(10-p)(10+p)} = 0$$

$$p = 0 \quad \vee \quad p = 5$$

↓
ook goed

Voorbeeldexamen Wiskunde I(A): Oefeningen

Willy Arts — Studiebegeleider Wiskunde en toegepaste Statistiek

Faculteit Economie en bedrijfskunde

Vrijdag 9-12-2016

1. Bepaal het definitiegebied, de waardeverzameling en de inverse relatie van de volgende functie. Is f^{-1} een functie?

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x^2 - 49}{x^2 - 1}\right)$$

2. Ga na of de volgende limieten bestaan. Zo neen, ga na of de linker- en rechterlimiet er bestaan. Bereken bovendien de limiet(en).

$$\lim_{x \rightarrow -1} \ln\left(\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}\right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arccos\left(\frac{3x + 2}{5x + 2}\right) =$$

3. Bereken de afgeleide functie van de volgende functie:

$$f(x) = (x^2 + 1)^{e^x}$$

4. Stel dat de inverse vraagfunctie van een product gegeven wordt door $D^{-1}(q) = 11 - q^2$ en dat de aanbodsfunctie gekend is nl.: $S(p) = \frac{1}{5}(p + 3)$.

- Bepaal de prijs p_e en de verkochte hoeveelheid goederen q_e bij marktevenwicht.
- Men wil een vaste taks t (per product) heffen op de aanbieder. Hoe groot moet deze taks t zijn opdat de evenwichtsprijs met $1/7$ toeneemt?
- Neem aan dat de prijsevolutie van dit product dynamisch is, volgens het spinnenwebmodel. Momenteel bedraagt de prijs $p_0 = 2$. Wat is de prijs na twee tijdspannes?
- Bepaal het voor de vrager economisch relevante prijsinterval en bepaal het gebied waar de vraagfunctie elastisch is.
- Voor welke prijs is de prijselasticiteit van het aanbod dubbel zo groot als de absolute waarde van de prijselasticiteit van de vraag? Wat is de prijselasticiteit van de vraag dan?

b. Een functie voldoet aan de vws en vld stelling v. Rolle als ze afleibaar is in $]a,b[$, continu is in $[a,b]$ en $f(a) = f(b) = 0$

c. $g'(x) = \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ dus ook

$$g'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

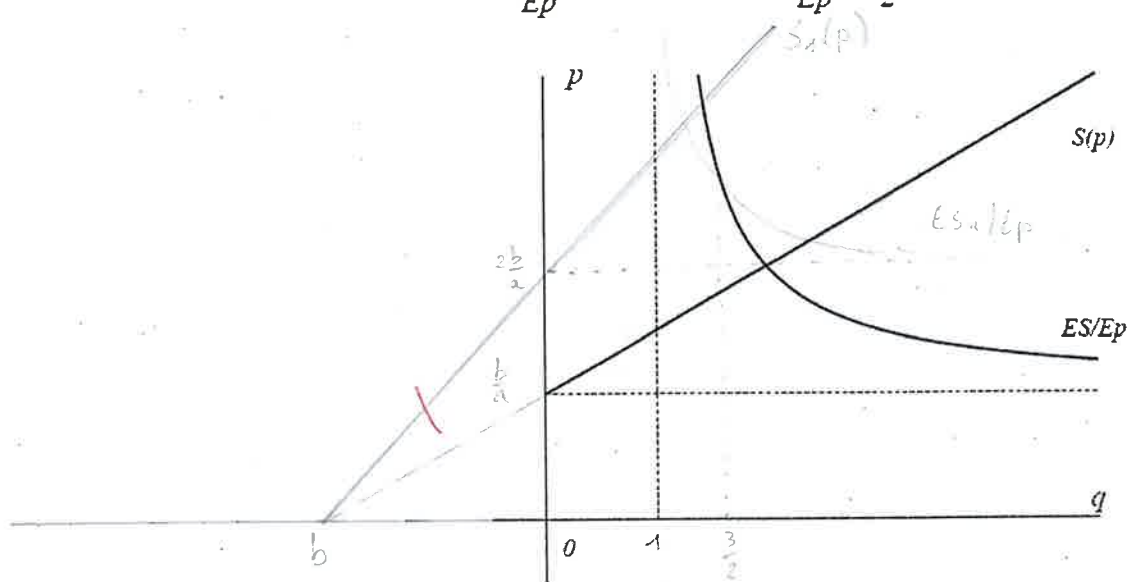
6. d. zie minerva

Gegeven is een lineaire aanbodfunctie $S(p) = ap + b$, met $a > 0$ en $b < 0$, en de elasticiteitsfunctie $\frac{ES}{Ep}$. Schets in de volgende figuur de grafiek van een lineaire

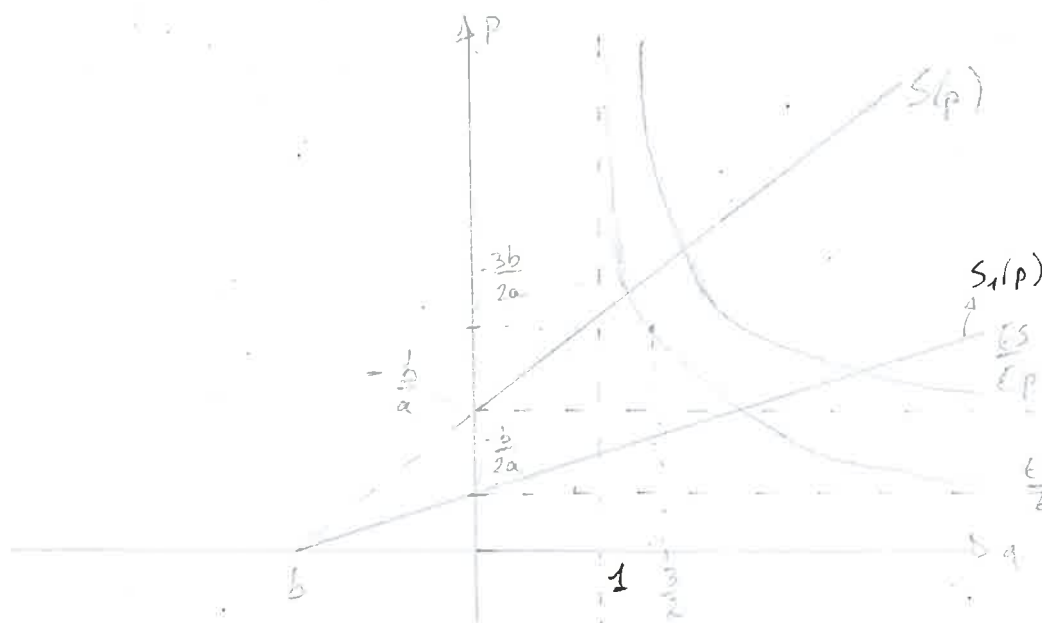
aanbodfunctie $S_1(p) = 2ap + b$, en haar corresponderende elasticiteitsfunctie $\frac{ES_1}{Ep}$. Geef

de vergelijking van de elasticiteitsfunctie $\frac{ES_1}{Ep}$, bereken bovendien de coördinaten van het

punt op de grafiek van $\frac{ES_1}{Ep}$ waarvoor geldt $\frac{ES_1}{Ep} = \frac{3}{2}$, en geef dit punt weer in de grafiek.

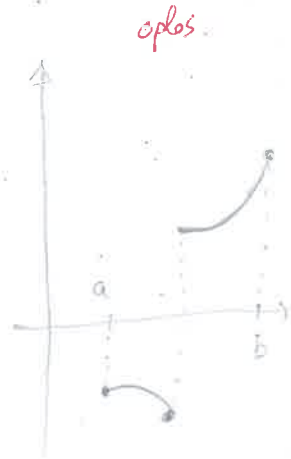
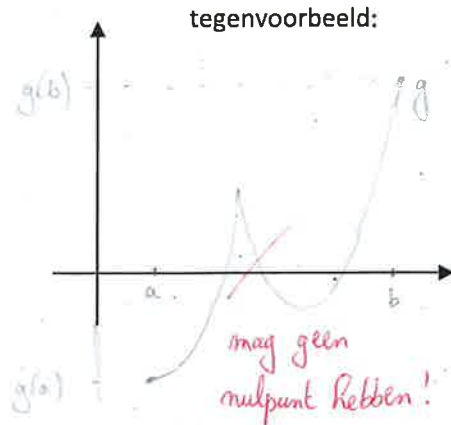
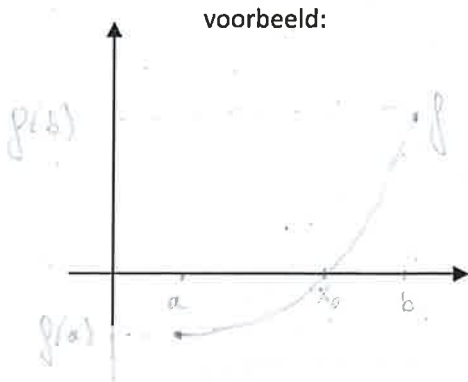


$(0, b)$
 $(-\frac{b}{a}, 0)$



4. De stelling van Bolzano zegt : als f continu is in een gesloten interval $[a, b]$ en $f(a)f(b) < 0$, dan heeft f een nulpunt in $]a, b[$.

Geef de meetkundige betekenis van deze stelling door een voorbeeld (nl. grafiek van een functie f die aan de voorwaarden voldoet, en dus de eigenschap vertoont) en een tegenvoorbeeld (nl. grafiek van een functie g , met $[a, b] \subseteq \text{def}(g)$, die niet aan de continuïteitsvoorwaarde voldoet maar wel aan $g(a)g(b) < 0$, en dus de eigenschap niet vertoont) te schetsen.



5. (Vraag van de dag nr 16)

Stelling (Lagrange) Stel dat f afleidbaar is in $]a, b[$ en continu in $[a, b]$. Dan bestaat er minstens één getal x_0 tussen a en b ($x_0 \in]a, b[$), waarvoor geldt $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Bewijs. Stel $g(x) = \alpha x + \beta$. Als we eisen dat $g(a) = f(a)$ en $g(b) = f(b)$, dan leiden deze voorwaarden tot een unieke oplossing voor α en β , nl.

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

De functie $f - g$ voldoet aan alle voorwaarden om de stelling van Rolle toe te passen, dus er bestaat een $x_0 \in]a, b[$ met $(f - g)'(x_0) = 0$, m.a.w. $f'(x_0) = g'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

a ■ Leg uit hoe men α vindt.

b ■ Wat zijn de voorwaarden om de stelling van Rolle toe te passen?

c ■ Waarom is $g'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$?

d ■ Geef de meetkundige betekenis van deze stelling (figuur).

Oplossing:

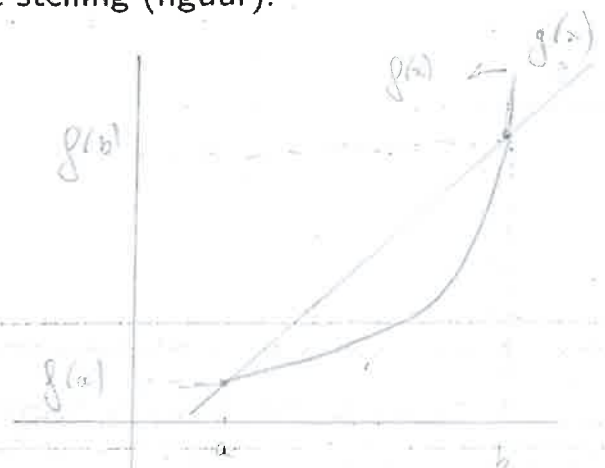
a. $g(x)$ = Rechte die 2 punten verbindt

uitdrukken dat $g(a) = f(a)$ en $g(b) = f(b)$

Leidt tot stelsel $\begin{cases} \alpha a + \beta = f(a) \\ \alpha b + \beta = f(b) \end{cases}$

trek 1 af v. 2

$$\alpha(b-a) = f(b) - f(a) \rightarrow \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Voorbeeldexamen Wiskunde I(A): Theorie

Willy Arts - Studiebegeleider Wiskunde en toegepaste Statistiek

Faculteit Economie en bedrijfskunde

Vrijdag 9-12-2016

1. Beschouw drie verzamelingen $U = \{a, b, c\}$, $V = \{0, 1, 2\}$, $W = \{x, y, z\}$, en twee relaties $R = \{(a, 0), (b, 1), (c, 1)\}$ en $R' = \{(a, y), (b, x), (c, z)\}$. Som de elementen van de volgende drie verzamelingen op. Kruis bovendien aan welke van deze verzamelingen een functie, afbeelding, injectie en/of surjectie zijn (per lijn kunnen er uiteraard meerdere kruisjes voorkomen):

verzameling	opsomming	functie	afbeelding	injectie	surjectie
$\text{im}(R) \times \text{im}(R')$	$\{(0, a), (1, b), (2, c)\}$	☒	☒	☒	☒
$R^{-1} \setminus \{(1, c)\}$	$\{(0, a), (1, b)\}$	☒	☒	☒	☒
$R \circ (R')^{-1}$	$\{(x, a), (y, b), (z, c)\}$	☒	☒	☒	☒

2. Geef voor elk van de volgende functies het definitiegebied, de waardeverzameling, en de gevraagd limiet (indien ze niet bestaat schrijf je gewoon "onbestaande").

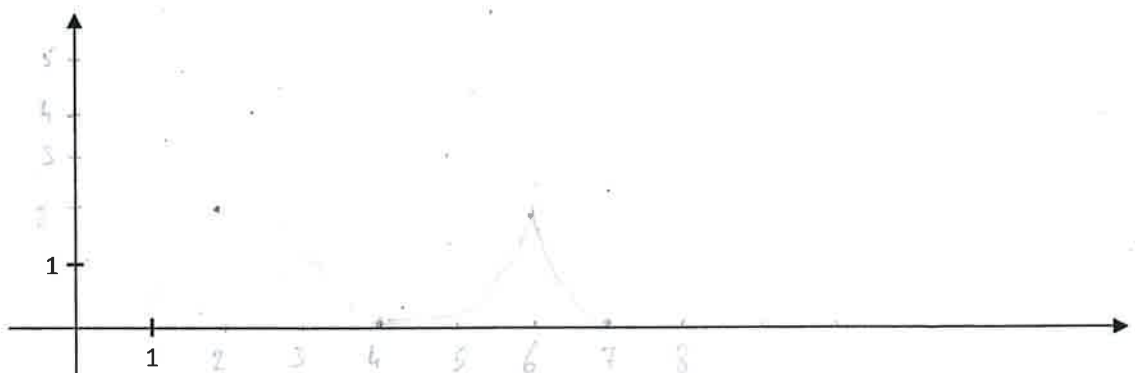
$f(x)$	$\text{def}(f)$	$\text{im}(f)$	limiet
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \text{bestaat niet}$
$\arccos(x)$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{\pi}{2}$
$\exp_a(x)$ (met $0 < a < 1$)	$\mathbb{R}$	$]0, +\infty[$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

3. Teken de grafiek van een functie f die continu is op $]1, 7]$, afleidbaar op $]1, 6[\cup]6, 7[$ en die voldoet aan:

$\forall p > 0: \exists \delta > 0: 1 < x < 1 + \delta \Rightarrow f(x) > p \rightarrow \text{def. rechte limiet in 1}$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 7} f(x) = 0, \quad f(6) = 2, \quad f'(4) = 0$$

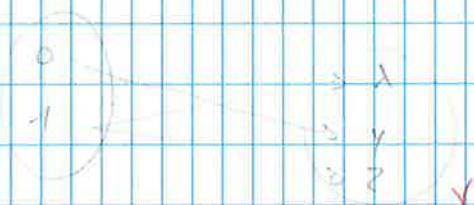
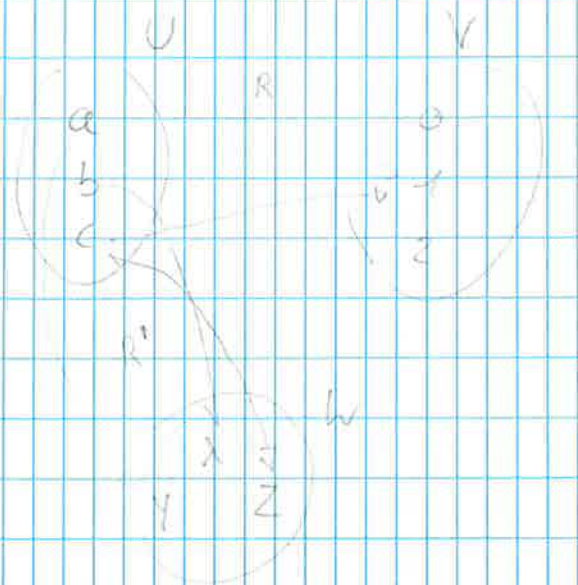
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(6+h) - f(6)}{h} = +\infty, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(6+h) - f(6)}{h} = -\infty \quad \text{en} \quad \frac{Ef}{Ex}(2) = 1$$



09/12/16

Voorbeeldexamen Wiskunde

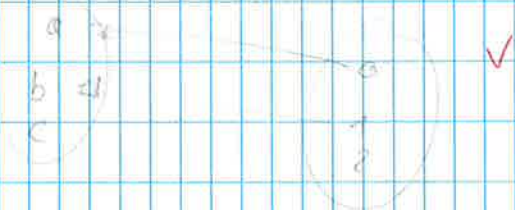
1)



$$\{(0, x), (0, y), (0, z), (1, x), (1, y), (1, z)\}$$

$$R^{-1} \setminus \{(1, x)\}$$

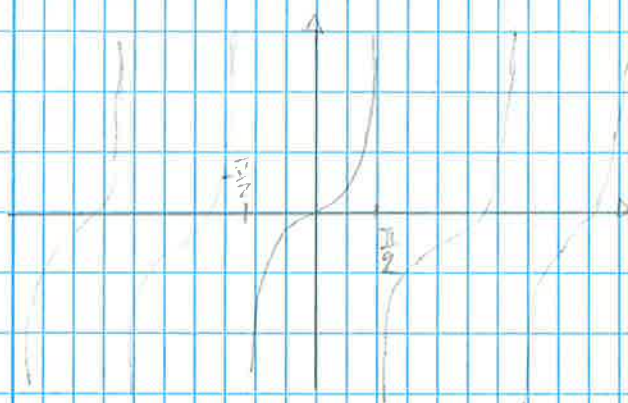
afbeelding: met daarvoor
voldoende zijn (a, b)



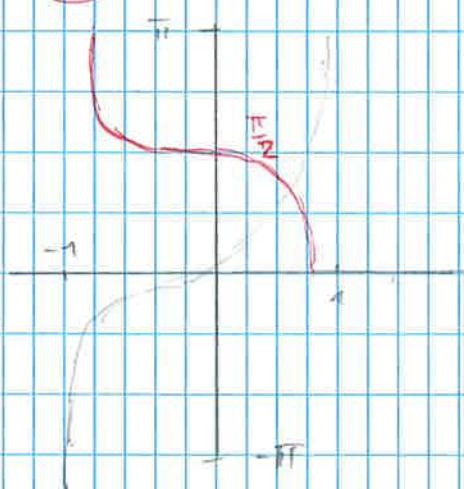
$$(R')^{-1}$$



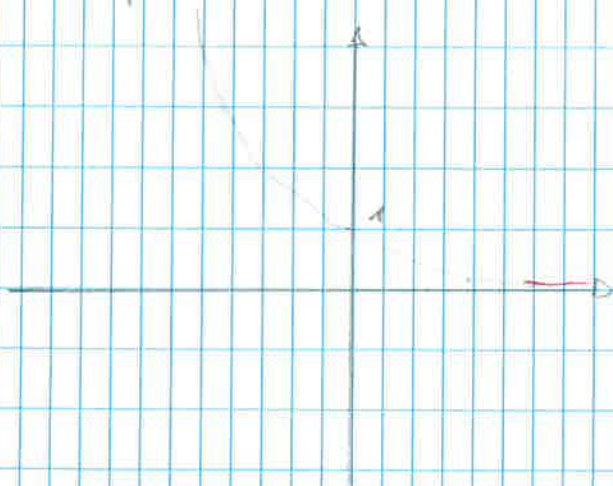
2) $\tan(x)$



$\arccos(x)$

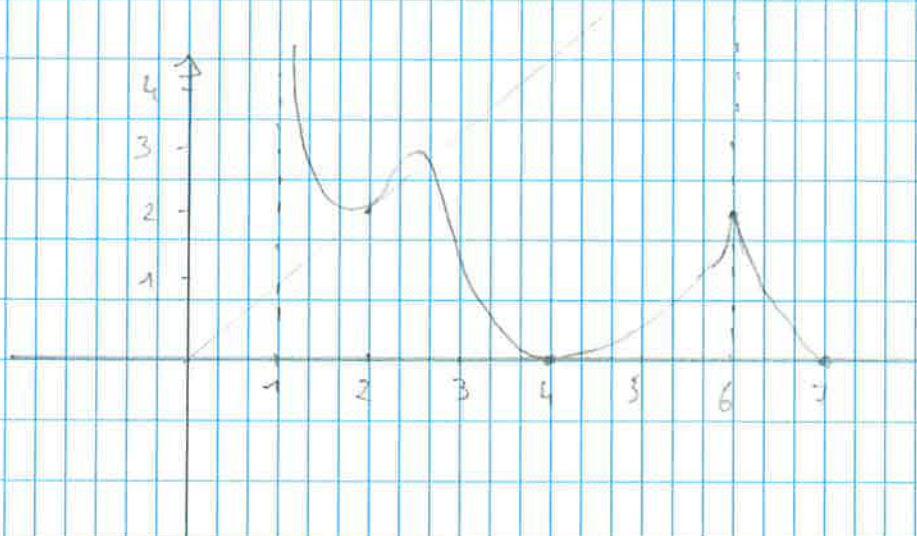


$\exp_a(x)$



3)

*



$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{f(6+h) - f(6)}{h} = -\infty$$

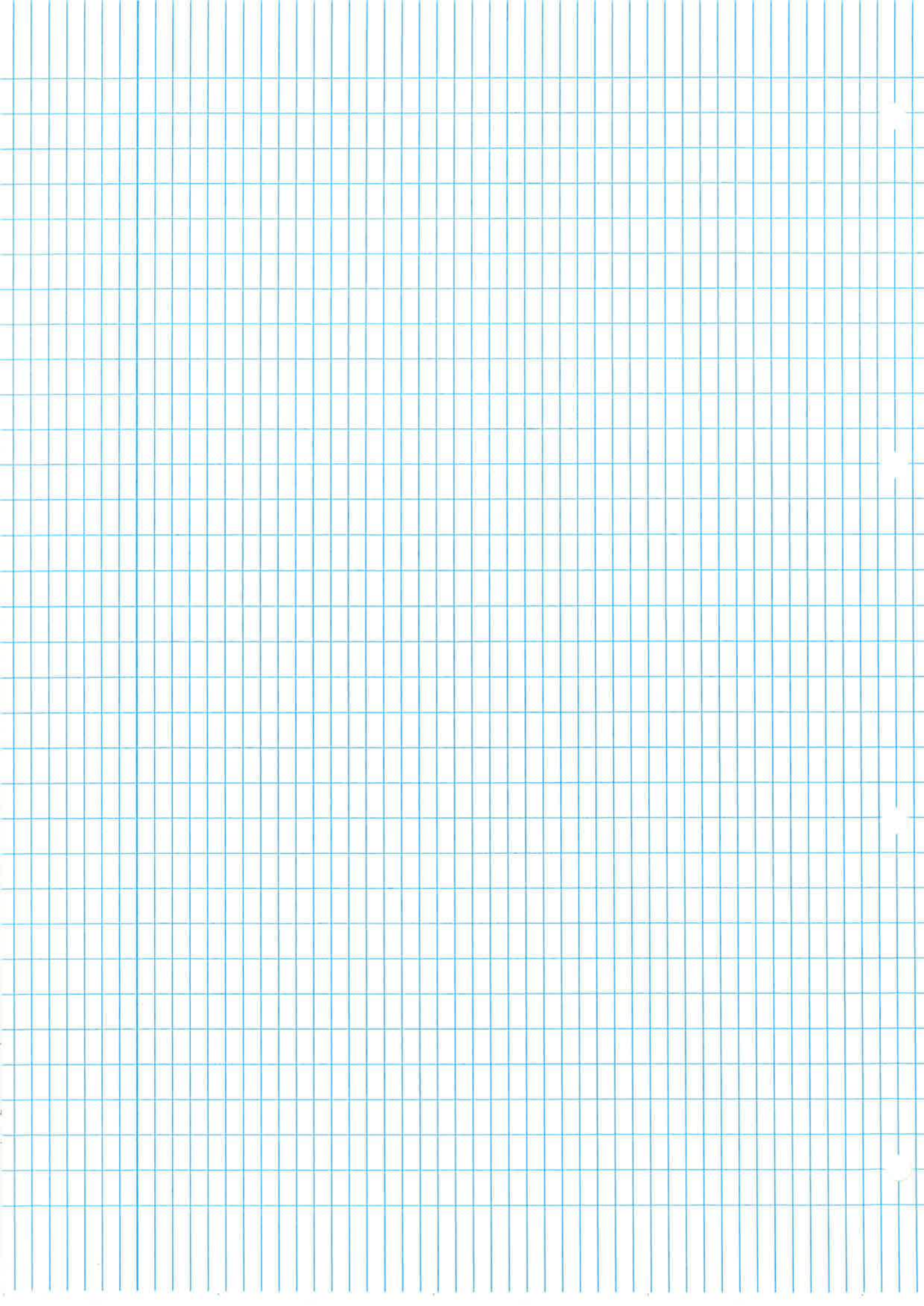
↓
differentialquotient

das nicht existiert $= -\infty$ (vertikal)

(- gehen $\rightarrow$ fct. $\downarrow$)

$$\frac{f'(x)}{f'(x)} = \frac{\text{nicht existiert}}{\text{nicht existiert}} = 1 \Rightarrow \text{vertikal} = \text{nicht existiert}$$

das mit asymptote



c)

$$S_A(p) = \begin{matrix} \nearrow (a, b) \\ \searrow (-\frac{b}{2a}, 0) \end{matrix}$$

$$\frac{ES_A(p)}{Ep} = \frac{p}{p + \frac{b}{2a}} = \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow 2p = 3(p + \frac{b}{2a})$$

$\rightarrow \dots$

$$\rightarrow p = -\frac{3b}{2a}$$

□

Befragungen

1) $f(x) = \arcsin\left(\frac{x^2-49}{x^2-1}\right)$

we weten: $\text{def arcsin} = [-1, 1] \quad \vee \rightarrow -1 \leq \frac{x^2-49}{x^2-1} \leq 1$

VND: $x^2-1 \neq 0$

$x \neq 1 \quad \vee \quad x \neq -1$

x	-7	-1	1	7
x^2-49	$\neq 0$	-	-	$\neq 0$
x^2-1	+	+	-	+
$f(x)$	+	-	+	-

deze dubbele ongelijkheid
opsplitsen:

$$-1 \leq \frac{x^2-49}{x^2-1}$$

Wanneer kunnen $[-1, 1]$?

$$\frac{x^2-49}{x^2-1} + 1 \geq 0$$

$\text{def}(f): [-1, 1]$

$\text{im}(f): [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Zie Mimeo's.

$$\frac{2x^2-50}{x^2-1} \geq 0$$

$$\frac{2(x^2-25)}{x^2-1} \geq 0$$

$$f^{-1} = y = \arcsin\left(\frac{x^2-49}{x^2-1}\right)$$

$$\sin(y) = \frac{x^2-49}{x^2-1} \quad \text{en } y \in \text{im}(\arcsin) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$(x^2-1)\sin(y) = x^2-49$$

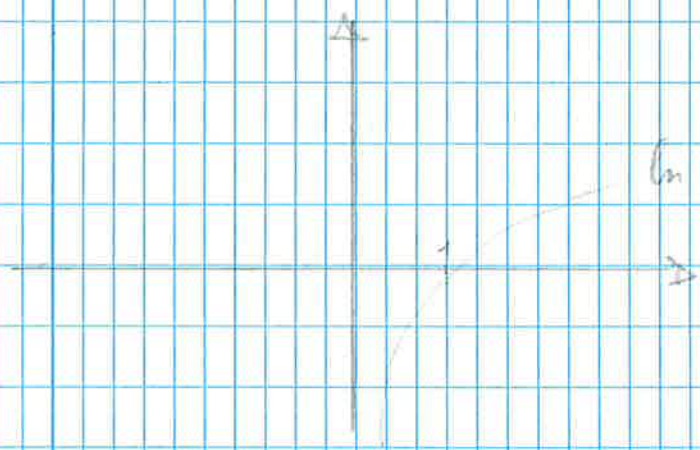
$$x^2(1-\sin(y)) = 49-\sin(y)$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{49-\sin(y)}{1-\sin(y)}} = f^{-1}(y)$$

Zie rest Minerva

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow -1} \ln\left(\frac{x^2-4}{x^2-1}\right) = \ln\left(\frac{1-4}{1-1}\right) = \ln\left(\frac{-3}{0}\right) \quad 0^+ \text{ of } 0^-? \quad \checkmark$$

$$= \infty$$



$$= \ln\left(\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-4}{(x+1)(x-1)}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{-3}{0 \cdot (-2)}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{3}{0 \cdot 2}\right)$$

$$RL: \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln\left(\frac{x^2-4}{x^2-1}\right) = \ln\left(\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2-4}{(x+1)(x-1)}\right) = \ln\left(\frac{3}{0^+ \cdot 2}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos\left(\frac{3x+2}{5x+2}\right) = \ln(+\infty) = +\infty$$

$$LL: \text{analog} \quad \dots \quad = \ln\left(\frac{3}{0^- \cdot 2}\right)$$

$$= \ln(-\infty) = \text{bestaat niet!}$$

4)

$$\begin{aligned} \Delta(q) &= 11 - q^2 \\ S(p) &= \frac{1}{5}(p+3) \\ D(q) &= ? \\ p &= 11 - q^2 \\ q^2 &= 11 - p \\ q &= \sqrt{11 - p} \end{aligned}$$

$$b \quad S(p - \epsilon)$$

Die Minerva

- \epsilon

want aanbieden moet dit afstaan

$$= \frac{x^{2+1}}{2+1} \ln(x^{2+1}) + x = \frac{x^3}{3} \ln(x^3) + x$$

$$= \frac{x^{2+2}}{2x} \cdot (e^x \ln(x^2+1) + e^x)$$

$$f'(x) = f(x) / (e^x \ln(x^2+1))'$$

$$f'(x) = \frac{f(x)}{\ln(x^2+1)}$$

$$f'(x) = \frac{e^x \ln(x^2+1)}{e^{x-1} \cdot 2x}$$

$$3) f(x) = (x^2+1)e^x$$

✓

$$\arccos(1/3)$$

$$\arccos \left(\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{3x+2}{5x+2} \right) \right)$$

✓

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \arccos \left(\frac{3x+2}{5x+2} \right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \arccos \left(\frac{3x+2}{5x+2} \right) = \frac{\pi}{2}$$

$$dy = [-1, 1]$$

$$[0, \pi]$$

